

Приложение к журналу

КВАНТ

№1/95

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

ГЕОМЕТРИЯ

Бюро



Квантум

ШКОЛА
В «КВАНТЕ»

ГЕОМЕТРИЯ

*Под редакцией
А.А.Егорова*



Москва 1995
Бюро «Квантум»

Ш67 Школа в "Кванте": Геометрия / под ред. А. А. Егорова.— М.: Бюро Квантум, 1995.— 128 с. (Прил. к журналу "Квант")

Книга представляет собой сборник статей по геометрии, тематика которых либо присутствует в школьной программе, либо близка к ней, но изучается лишь в факультативных курсах или классах с углубленным изучением математики. Во всех статьях изложение предмета вполне автономно и доступно читателю, впервые знакомящемуся с ним.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, а также для всех, кто интересуется математикой.

ББК 22.151

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге — третьем выпуске серии «Школа в «Кванте» — собраны статьи по геометрии, в разные годы публиковавшиеся на страницах нашего журнала под рубриками «По страницам школьных учебников» и «Школа в «Кванте»». Нам кажется, что собранные вместе, они помогут школьникам, интересующимся математикой, расширить и углубить представления о многих понятиях и фактах геометрии, слабо представленных (или вовсе отсутствующих) в школьных курсах.

Некоторые из этих статей, несомненно, будут полезны и абитуриентам, поскольку в арсенале экзаменационных комиссий, как показывает опыт, нередко, например, задачи о каркасных или равногранных тетраэдрах, не говоря уж о стереометрии, извечном ужасе поступающих в вузы.

Учителя гимназий, лицеев и школ с углубленным изучением математики также найдут в этом сборнике немало полезного.

ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

В. Болтянский

Движение плоскости естественно представлять с точки зрения механики как движение одного нерастяжимого листа по другому. Оказывается, такие движения бывают только четырех типов. Об этом и о свойствах движений, полезных для решения задач, рассказано в этой статье.

Наглядное описание движений

Пусть g — произвольное отображение плоскости на себя. Отображение g называется *движением плоскости*, если оно сохраняет расстояния, т. е. для любых точек A, B этой плоскости справедливо равенство

$$g(A)g(B) = AB.$$

Наглядно движение плоскости можно описать следующим образом. Будем представлять себе плоскость в виде двух наложенных один на другой листов, верхний из которых прозрачен. На нижнем листе отмечены несколько точек; те же точки отмечены и на верхнем листе. Переложив прозрачный лист в новое положение, мы увидим как первоначальные положения точек (на нижнем, непрозрачном листе), так и новые их положения (на прозрачном листе). При этом (если материал листов нерастяжим) расстояние между любыми двумя точками в первоначальном положении равно расстоянию между точками, в которые они перешли в результате перекладывания прозрачного листа в новое положение. Таким образом, это перекладывание сохраняет расстояния, т. е. оно представляет собой наглядную модель движения.

Заметим, что описанное перекладывание не обязательно осуществлять с помощью «непрерывного скольжения» прозрачного листа по непрозрачному. Мы можем также снять прозрачный лист, перевернуть его на другую сторону («изнанку») и снова наложить на непрозрачный.

Пусть теперь в плоскости заданы две пары точек A, B и A_1, B_1 , причем $AB = A_1B_1 \neq 0$. Описанная выше наглядная

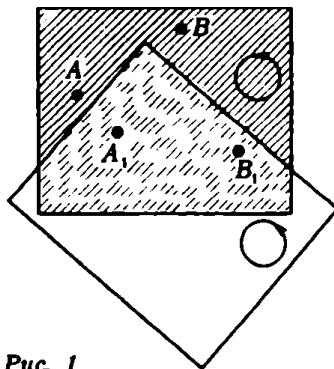


Рис. 1

модель движения подсказывает, что существуют ровно два движения плоскости, переводящие точку A в A_1 и точку B в B_1 .

В самом деле, при помощи скольжения прозрачного листа по непрозрачному можно найти только одно положение прозрачного листа, при котором отмеченные на нем точки A, B совпадут соответственно с точками A_1, B_1 на непрозрачном листе (рис. 1). Можно поступить и иначе: сначала перевернуть прозрачный лист на обратную сторону, а затем совместить отмеченные на нем точки A, B с точками A_1, B_1 на непрозрачном листе. Других движений (кроме двух указанных), переводящих точки A, B соответственно в A_1, B_1 не существует. Мы видим, что:

Если $AB = A_1B_1$ (причем $A \neq B$), то существуют ровно два движения плоскости, переводящие точки A, B соответственно в A_1, B_1 .

Разумеется, проведенный "мысленный эксперимент" с описанной наглядной моделью нельзя считать математическим доказательством сформулированного утверждения — это можно считать лишь опытным подтверждением. В математике же сформулированное утверждение принимается (в рамках школьной геометрии) без доказательства, т. е. представляет собой аксиому: ее называют *аксиомой подвижности плоскости*.

Классификация движений плоскости

Три вида движений известны еще из курса 5-го класса: *осевая симметрия, центральная симметрия и параллельный перенос*. Центральная симметрия является частным случаем поворота (она представляет собой поворот на 180°), который изучается в 6-м классе.

Нам понадобится еще один вид движений — так называемая *скользящая симметрия*. Именно, пусть l — некоторая прямая на плоскости, s — симметрия относительно прямой l , а t — параллельный перенос в направлении прямой l , не являющийся

тождественным отображением. Композиция $s \circ t$ этих движений и называется *скользящей симметрией* с осью l . Заметим, что движения s и t перестановочны: $s \circ t = t \circ s$. Заметим также, что l — единственная прямая, которая при скользящей симметрии $s \circ t$ переходит сама в себя.

Итак, мы имеем четыре частных случая движений: поворот, параллельный перенос, осевая симметрия, скользящая симметрия. Следующая теорема показывает, что этими частными случаями и исчерпываются все движения плоскости:

Теорема 1. *Произвольное движение плоскости представляет собой либо поворот, либо параллельный перенос, либо осевую симметрию, либо скользящую симметрию.*

Доказательство. Пусть g — движение плоскости, отличное от тождественного (тождественное движение можно считать параллельным переносом на нулевой вектор). Тогда существует такая точка A , что $g(A) \neq A$. Положим $B = g(A)$, $C = g(B)$. Рассмотрим теперь три возможных случая:

а) Точки A, B, C не лежат на одной прямой, т. е. являются вершинами треугольника ABC . Обозначим через O центр окружности, описанной около этого треугольника (рис. 2), а через l — прямую, проходящую через середины M, N сторон AB и BC . Треугольник ABC — равнобедренный (движение g переводит точки A, B в B, C , поэтому $AB = BC$). Следовательно, поворот r с центром O , переводящий точку A в B , переводит точку B в C . Далее, обозначим через s симметрию относительно прямой l , через t — параллельный перенос, переводящий точку M в N . Тогда скользящая симметрия $h = s \circ t$ переводит точку A в B , а точку B в C . Итак, мы нашли два движения r и h , каждое из которых переводит точки A, B соответственно в B, C . Третьего такого движения не существует (согласно аксиоме подвижности плоскости). Следовательно, движение g , которое тоже переводит A, B соответственно в B, C , должно совпадать

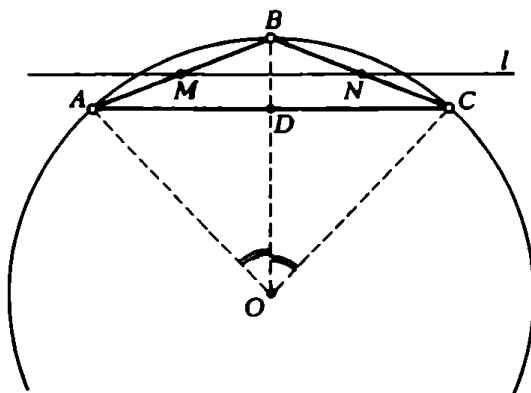


Рис. 2

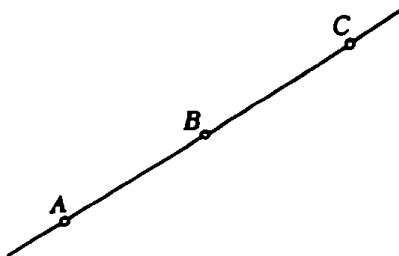


Рис. 3

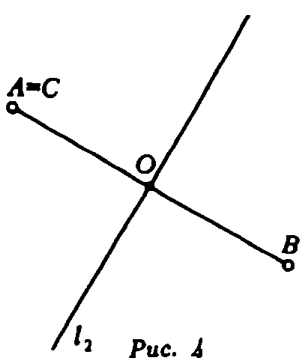


Рис. 4

либо с g , либо с h , т. е. в рассматриваемом случае g является либо поворотом, либо скользящей симметрией.

б) Точки A, B, C лежат на одной прямой, причем $A \neq C$. Так как $AB = BC$, то B — середина отрезка AC (рис. 3). Обозначим через s_1 симметрию относительно прямой AC , а через t_1 — параллельный перенос, переводящий точку A в B . Каждое из движений t_1 и $h_1 = s_1 \circ t_1$ переводит точки A, B соответственно в B, C . Как и в случае а), отсюда следует, что g совпадает либо с t_1 , либо с h_1 , т. е. в рассматриваемом случае g является либо параллельным переносом, либо скользящей симметрией.

в) Точки A и C совпадают, т. е. $g(A) = B$, $g(B) = A$ (рис. 4). Обозначим через r_2 центральную симметрию относительно середины O отрезка AB , а через s_2 — симметрию относительно прямой l_2 , проходящей через O и перпендикулярной AB . Каждое из движений r_2 , s_2 переводит точки A, B соответственно в B, A . Отсюда, как и в предыдущих случаях, вытекает, что g совпадает с одним из движений r_2 , s_2 , т. е. в этом случае g является либо центральной симметрией (и, значит, поворотом), либо осевой симметрией. Теорема доказана.

Движения и ориентация

Продолжим наглядные рассуждения, связанные с моделью, рассмотренной в начале статьи. Условимся считать, что на плоскости задано положительное направление отсчета углов. (Обычно на чертежах за положительное направление принимают направление против часовой стрелки.) Чтобы не забыть об этом соглашении, можно в уголке чертежа изобразить окружность, на которой стрелкой указано положительное направление отсчета углов.

Если некоторое движение описывается в нашей наглядной модели как резульатат скольжения плоскости по себе, то положительное направление отсчета углов при таком движении не меняется (см. рис. 1). В этом случае говорят, что произведено движение, *сохраняющее ориентацию*. Например, поворот и параллельный перенос могут быть осуществлены в результате

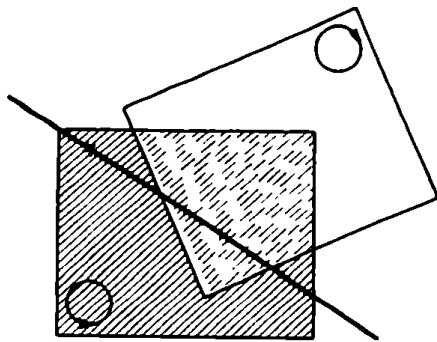


Рис. 5

скольжения плоскости по себе, т. е. они являются движениями, сохраняющими ориентацию.

Если же для осуществления движения мы перекладываем верхний (прозрачный) лист на обратную сторону, то окружность, на которой вначале было изображено направление обхода против часовой стрелки, перейдет в окружность с изображенным на ней направлением обхода по часовой стрелке. В этом случае говорят, что произведено движение, *меняющее ориентацию*. Например, осевая симметрия является движением, меняющим ориентацию (рис. 5).

Легко понять, что если каждое из движений f , g сохраняет ориентацию, то и их композиция $g \circ f$ будет движением, сохраняющим ориентацию. В самом деле, окружность l , на которой отмечено направление обхода против часовой стрелки, перейдет при движении f в окружность l_1 с направлением обхода также против часовой стрелки (так как f сохраняет ориентацию). В свою очередь при движении g окружность l_1 перейдет в окружность l_2 с направлением обхода также против часовой стрелки (так как g сохраняет ориентацию). При движении $g \circ f$ окружность l (с имеющимся на ней направлением обхода против часовой стрелки) перейдет в окружность l_2 с тем же направлением обхода. Таким образом, движение $g \circ f$ сохраняет ориентацию. Рассуждая аналогично, мы получим следующее утверждение:

Теорема 2. *Если каждое из движений f , g сохраняет ориентацию или если каждое из них меняет ориентацию, то их композиция $g \circ f$ является движением, сохраняющим ориентацию. Если же одно из движений f , g сохраняет, а другое меняет ориентацию, то $g \circ f$ является движением, меняющим ориентацию.*

Чтобы проще было запомнить эту формулировку, условимся считать движения, сохраняющие ориентацию, «положительными», а движения, меняющие ориентацию, — «отрицательными». Тогда для композиции движений будет действовать то же правило знаков, что и для умножения действительных чисел:

если f и g имеют одинаковые «знаки», то результат «положителен», а если разные — «отрицателен».

Заметим, что скользящая симметрия (она определялась, как композиция осевой симметрии и параллельного переноса) является, согласно теореме 2, движением, меняющим ориентацию. Таким образом, из всех движений плоскости, которые перечислены в теореме 1, поворот и параллельный перенос сохраняют ориентацию, а осевая и скользящая симметрия меняют ориентацию.

Задача о композиции движений

Применим сказанное в предыдущем пункте к нахождению композиции разных движений: двух осевых симметрий, поворота и параллельного переноса и т. д. Мы решим три задачи такого рода, а другие задачи предложим читателю для самостоятельного решения.

Задача 1. Найдите композицию $s_2 \circ s_1$ симметрий s_1 , s_2 относительно двух пересекающихся прямых l_1 , l_2 .

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых l_1 и l_2 (рис. 6). Через α обозначим угол, на который нужно повернуть прямую l_1 , чтобы она перешла в l_2 . Возьмем точку $A \in l_1$, отличную от O , и положим $B = s_2(A)$. Мы имеем $s_1(O) = O$, $s_2(O) = O$, и потому движение $g = s_2 \circ s_1$ переводит точку O в себя. Далее, $s_1(A) = A$, $s_2(A) = B$, т. е. $g(A) = B$. Ясно, что поворот r с центром O на угол 2α переводит точку A в B , а точку O в себя. Итак, мы имеем два перемещения r , s_2 , каждое из которых переводит точки O , A соответственно в O , B . Так как движение $g = s_2 \circ s_1$ тоже переводит O , A в O , B , в силу аксиомы подвижности g совпадает либо с r , либо с s_2 . Но с s_2 движение g совпадать не может, так как s_2 меняет ориентацию, а g сохраняет (по теореме 2). Следовательно, $g = r$, т. е. $s_2 \circ s_1$ есть поворот на угол 2α вокруг точки O .

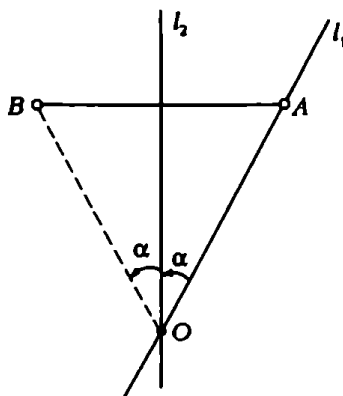


Рис. 6

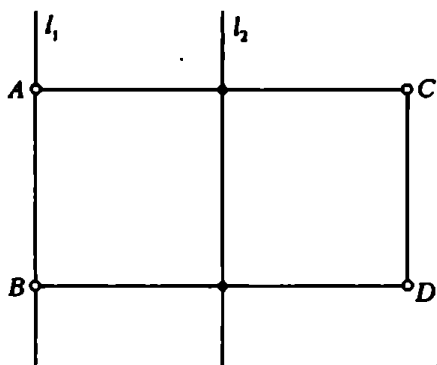


Рис. 7

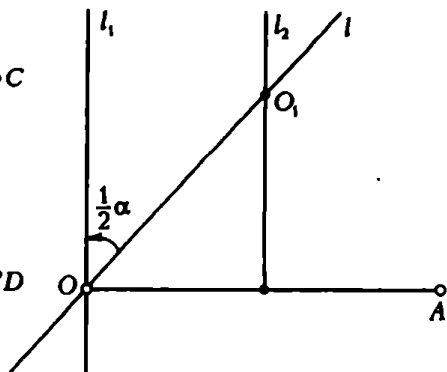


Рис. 8

Задача 2. Найдите композицию $s_2 \circ s_1$ симметрий s_1, s_2 относительно двух параллельных прямых l_1, l_2 .

Решение. Возьмем две точки $A, B \in l_1$ (рис. 7) и положим $C = s_2(A), D = s_2(B)$. Тогда $ABDC$ — прямоугольник. Обозначим через t параллельный перенос, переводящий точку A в C . Тогда $t(A) = C, t(B) = D$. Итак, мы имеем два движения t, s_2 , каждое из которых переводит точки A, B соответственно в C, D . Так как $g = s_2 \circ s_1$ тоже переводит A, B в C, D , g совпадает либо с t , либо с s_2 . Так как при этом g сохраняет ориентацию, то $g = t$. Итак, $s_2 \circ s_1$ есть параллельный перенос.

Задача 3. Найдите композицию поворота и параллельного переноса.

Решение. Пусть r — поворот с центром O на угол α (рис. 8), а t — параллельный перенос. Положим $A = t(O)$. Далее, проведем прямые l_1, l_2 , перпендикулярные прямой OA , первая из которых проходит через точку O , а вторая — через середину отрезка OA . Симметрии относительно прямых l_1, l_2 обозначим через s_1, s_2 . Тогда из задачи 2 следует $s_2 \circ s_1 = t$. Далее, через l обозначим прямую, проходящую через точку O , из которой l_1 получается поворотом на угол $\alpha/2$, а через s обозначим симметрию относительно прямой l . Тогда из задачи 1 следует $s_1 \circ s = r$. Значит,

$$t \circ r = (s_2 \circ s_1) \circ (s_1 \circ s) = s_2 \circ (s_1 \circ s_1) \circ s = s_2 \circ s,$$

откуда следует (в силу задачи 1), что $t \circ r$ есть поворот на угол α вокруг точки O_1 , в которой пересекаются прямые l_2 и l .

Заметим, что при решении мы воспользовались, во-первых, ассоциативностью операции композиции движений (т. е. возможностью произвольно расставлять скобки; это свойство справедливо не только для движений, но и для любых отображений) и, во-вторых, тем, что для осевой симметрии s_1 обратное отображение совпадает с s_1 , в связи с чем $s_1 \circ s_1$ есть тождественное отображение. Этот прием — разложение движений на

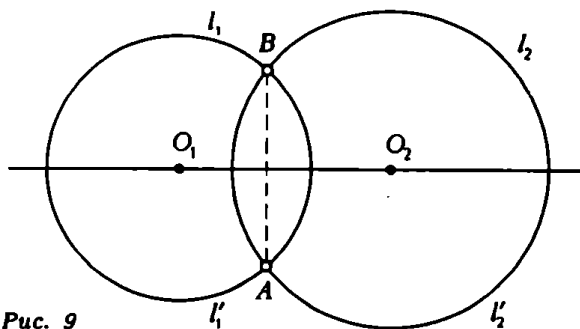


Рис. 9

осевые симметрии, оси которых выбираются так, чтобы в окончательном результате произошло «сокращение» — применяется и при решении других задач на отыскание композиции движений.

Применение движений к решению задач

Задача 4. Две окружности с центрами O_1 , O_2 пересекаются в точках A и B . Докажите, что прямая O_1O_2 перпендикулярна отрезку AB и делит его пополам.

Решение. Обозначим через l_1 , l_2 полуокружности, лежащие по одну сторону прямой O_1O_2 , через l_1' , l_2' — полуокружности, лежащие по другую сторону (рис. 9), а через s — симметрию относительно (O_1O_2) . Тогда $l_1' = s(l_1)$, $l_2' = s(l_2)$. Так как $s(l_1 \cap l_2) = s(l_1) \cap s(l_2) = l_1' \cap l_2'$, получаем $s(A) = B$, т. е. точки A и B симметричны относительно O_1O_2 . Отсюда и вытекает требуемое утверждение.

В этом решении мы воспользовались тем, что для любого движения f и любых фигур M , N справедливо соотношение $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$. Докажите это самостоятельно.

Задача 5. На сторонах AB и BC произвольного треугольника ABC построены вне его квадраты $ABMN$ и $BSPQ$. Точка K — середина отрезка MQ . Докажите, что отрезок BK перпендикулярен основанию AC и вдвое короче его.

Решение. Пусть L — середина отрезка AC (рис. 10). Надо доказать, что отрезки BK и CL перпендикулярны друг другу и равны. Для этого удобнее всего установить, что первый отрезок получается из второго поворотом на $\pm 90^\circ$ вокруг некоторой точки. Итак, нам желательно найти точку, поворот на 90° или -90° вокруг которой переводит точку C в B , а точку L в K . Но ясно, что поворот r на -90° вокруг центра квадрата $BSPQ$ переводит точку C в B . Значит, остается установить, что $r(L) = K$.

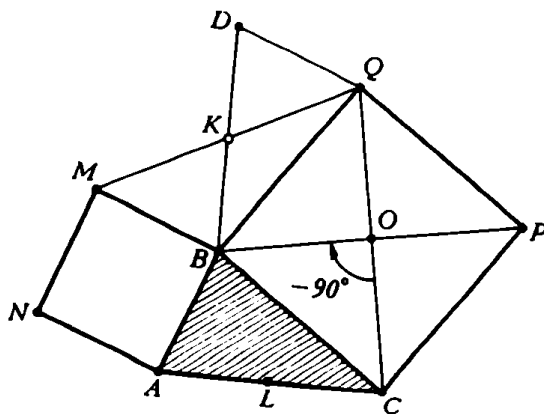


Рис. 10

Мы имеем $r(C) = B$, $r(B) = Q$, положим $r(A) = D$. Тогда $r(BA) = QD$, т. е. отрезки AB и DQ перпендикулярны и равны. Значит, отрезки BM и QD параллельны и равны, т. е. $BMDQ$ — параллелограмм. Следовательно, точка K (середина диагонали MQ) является также серединой отрезка BD . Так как $r(CA) = BD$, получаем $r(L) = k$. Итак, $r(C) = B$, $r(L) = K$, т. е. $r(CL) = BK$, и потому отрезки CL и BK перпендикулярны и равны.

Задача 6. Восстановите пятиугольник, зная точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 , являющиеся серединами последовательных его сторон.

Решение. Пусть $ABCDE$ — искомый пятиугольник (рис. 11). Обозначим через s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 центральные симметрии относительно точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 . Тогда $s_1(A) = B$, $s_2(B) = C$, $s_3(C) = D$, $s_4(D) = E$, $s_5(E) = A$, т. е. движение $f = s_5 \circ s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$ переводит точку A в себя. Но

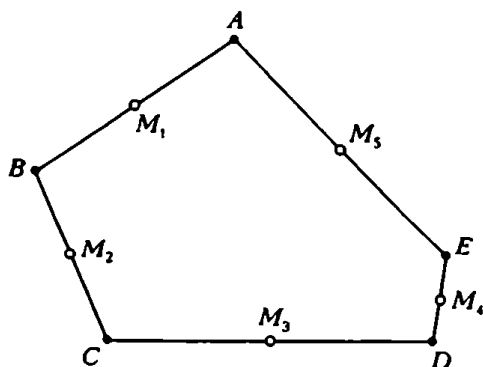


Рис. 11

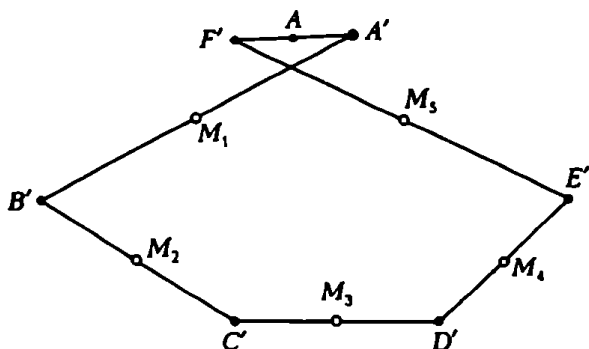


Рис. 11

композиция $s_5 \circ s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$ пяти движений, каждое из которых есть центральная симметрия, т. е. поворот на 180° , представляет собой поворот на $180^\circ \cdot 5 = 2 \cdot 360^\circ + 180^\circ$ (см. ниже задачу 9). Следовательно, f есть центральная симметрия, и потому A есть центр этой симметрии. Как же найти точку A ? Берем произвольную точку A' и строим точки $B' = s_1(A')$, $C' = s_2(B')$, $D' = s_3(C')$, $E' = s_4(D')$, $F' = s_5(E')$. Тогда $f(A') = E'$, т. е. точки A' и F' симметричны относительно искомой точки A (рис. 12), и потому A есть середина отрезка $A'F'$. Найдя A , легко затем отыскать и остальные вершины искомого пятиугольника.

Упражнения

1. Сколько существует движений плоскости, переводящих данный отрезок AB в себя?

2. Докажите следующее уточнение аксиомы подвижности: если $AB = A_1B_1$, причем $A \neq B$, то существует ровно одно сохраняющее ориентацию движение, переводящее точки A, B соответственно в A_1, B_1 , и ровно одно меняющее ориентацию движение, переводящее точки A, B соответственно в A_1, B_1 .

3. Сколько существует движений, переводящих правильный n -угольник в себя? Сколько из них сохраняют ориентацию? меняют ориентацию? *Указание.* Воспользуйтесь тем, что каждое из этих движений переводит центр описанной окружности в себя.

4. Точка A называется *неподвижной точкой* движения f , если $f(A) = A$. Сколько неподвижных точек имеет каждое из движений, перечисленных в теореме 1?

5. Прямая l называется *неподвижной прямой* движения f , если $f(l) = l$. Сколько неподвижных прямых имеет каждое из движений, перечисленных в теореме 1?

6. Докажите, что любое движение плоскости можно представить в виде композиции нескольких осевых симметрий.

7. Докажите, что движение в том и только в том случае сохраняет ориентацию, если оно может быть представлено в виде композиции четного числа осевых симметрий; движение в том и только в том слу-

чае меняет ориентацию, если оно может быть представлено в виде композиции нечетного числа осевых симметрий.

8. Найдите композицию $f_2 \circ f_1$, если:

а) f_1 – параллельный перенос, f_2 – поворот;

б) f_1 – поворот вокруг точки O_1 на угол α_1 , f_2 – поворот вокруг точки O_2 на угол α_2 ;

в) f_1 и f_2 – скользящие симметрии с параллельными осями;

г) f_1 и f_2 – скользящие симметрии с пересекающимися осями;

д) f_1 – скользящая симметрия, f_2 – параллельный перенос;

е) f_1 – поворот, f_2 – скользящая симметрия.

9. Пусть f_1, f_2, \dots, f_k – повороты (с некоторыми центрами) на углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ соответственно. Докажите, что $f_k \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ есть поворот на угол $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$, если α не кратно 360, и параллельный перенос, если α кратно 360.

10. Докажите, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

11. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежит в данной точке, а две другие – на данных окружностях.

12. Даны две точки M, N , не лежащие на окружности l , и хорда AB этой окружности. Постройте для окружности l такую хорду CD , равную хорде AB , что $CM \parallel DN$.

13. В окружности l даны две хорды AB и CD , M – внутренняя точка отрезка CD . Постройте на окружности l такую точку N , что вписанный угол ANB отсекает на прямой CD отрезок, имеющий точку M своей серединой.

Равнобедренный треугольник

Равнобедренный треугольник — симметричная фигура: биссектриса угла при вершине — его ось симметрии. В курсе геометрии с помощью осевой симметрии доказываются свойства равнобедренного треугольника об углах при его основании и о высоте, проведенной из вершины.

Вот еще одно простое свойство равнобедренного треугольника; оно нам поможет в дальнейшем решить несколько трудных задач.

Если на боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AM и CN , то точка пересечения прямых CM и AN лежит на биссектрисе BD треугольника.

Доказательство. Действительно, при симметрии относительно биссектрисы BD данного равнобедренного треугольника ABC вершина A переходит в вершину C , сторона AB переходит в сторону CB (рис. 1). Осевая симметрия — движение, длины отрезков при симметрии сохраняются. По условию $N \in BC$ и $CN = AM$, следовательно, точка $M \in AB$ переходит в точку N .

Итак, точки A и C , а также точки M и N симметричны относительно оси BD ; значит, симметричны друг другу и отрезки AN и CM . Пусть $K = AN \cap BD$. Поскольку K лежит на оси симметрии, симметричная ей точка — она сама. С другой стороны, $K \in AN$; следовательно, образ точки K должен принадлежать образу отрезка AN , т. е. отрезку CM . Тем самым $K = AN \cap CM \in BD$, что и требовалось доказать.

Пользуясь симметрией равнобедренного треугольника, решите следующие задачи.

1. Докажите, что в равнобедренном треугольнике а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты пересекаются в одной точке.

2. Треугольник $A'BC'$ получается из равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) поворотом с центром в вершине B на угол, величина которого меньше величины угла B (рис. 2). Стороны треугольников AB и $A'C'$ пересекаются в точке K , AC и $A'B$ — в точке M , $A'C'$ и BC — в точке L . Докажите, что а) BK — биссектриса

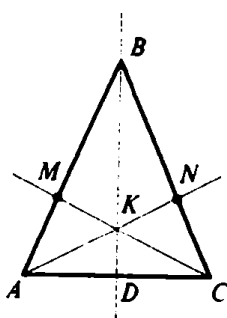


Рис. 1

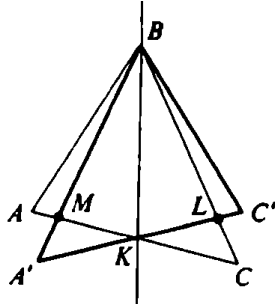


Рис. 2

угла $A'BC$; б) биссектрисы треугольников $A'BL$ и MBC пересекаются в одной точке.

3. Ромб $AB'C'D'$ получается из ромба $ABCD$ поворотом с центром в вершине A ($\angle A < \pi/2$) на угол, величина которого меньше величины угла A (рис. 3). Точка B' лежит внутри ромба $ABCD$. Стороны ромбов CD и $B'C'$ пересекаются в точке K . Докажите, что AK – биссектриса угла $B'AD$.

Кратчайший путь

Решим сначала такую задачу.

Дана прямая l и две точки A и B , лежащие по одну сторону от нее. Найдите кратчайший путь из A в B с заходом на прямую l .

Обозначим через A' точку, симметричную точке A относительно прямой l (рис. 4). Пусть X – некоторая точка на прямой l . Тогда $AX = A'X$ и $AX + BX = A'X + XB$.

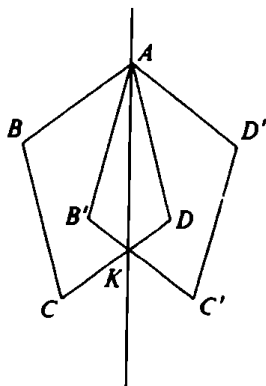


Рис. 3

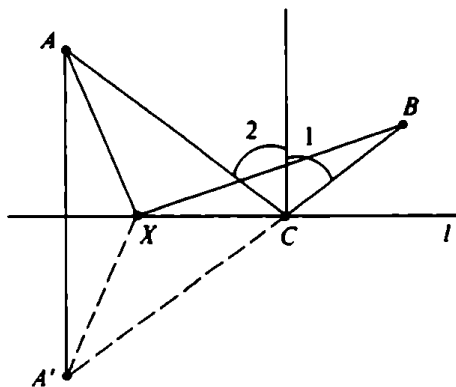


Рис. 4

Путь из A в B с заходом на прямую l равен длине ломаной $A'XB$; он будет кратчайшим, если длина этой ломаной будет наименьшей. Тогда ломаная $A'XB$ должна превратиться в отрезок $A'B$, а точка X — перейти в точку $C = A'B \cap l$.

Путь ABC и будет искомым.

Из решения этой задачи следует, что для кратчайшего пути ABC углы 1 и 2 равны между собой (см. рис. 4). Итак, кратчайший путь можно охарактеризовать тем, что для него «угол падения равен углу отражения».

Этот факт следует, в частности, из знаменитого принципа Ферма: свет (при отражении, преломлении и т. д.) распространяется между двумя точками по пути, прохождение которого занимает наименьшее время.

Осевая симметрия часто используется для отыскания кратчайшего пути или для реализации ситуации «угол падения равен углу отражения». Приведем несколько таких задач.

4. Даны прямая l и две точки P и Q по одну сторону от l . Найдите на прямой l такую точку R , чтобы периметр треугольника PQR был наименьшим.

5. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и высотой равнобедренный имеет наименьший периметр.

6. Дорога AB пересекает под острым углом реку BC (рис. 5). Гонец находится в точке P внутри угла ABC . Конь хочет пить, а гонец спешит выехать на дорогу AB . В каком месте реки должен гонец напоить коня, чтобы как можно скорее попасть на дорогу?

7. Дан острый угол ABC и точка P внутри него. Постройте треугольник наименьшего периметра, одна вершина которого совпадает с точкой P , а две другие лежат на сторонах данного угла.

8. Как изменятся решения задач 6 и 7, если в их условиях данные острые углы заменить прямыми или тупыми?

9. На прямоугольном бильярде $ABCD$ даны два шара M и N . Как надо толкнуть шар M , чтобы он, отразившись от бортов AB и BC , попал в шар N ?

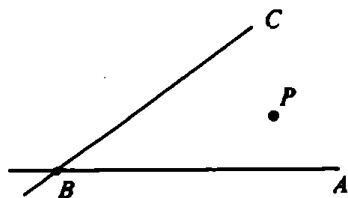


Рис. 5

ГОМОТЕТИЯ И ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Б. Гейдман

Здесь мы расскажем, как с помощью гомотетии решаются многие трудные планиметрические задачи — в частности, задачи про замечательные точки в треугольнике.

Задача про трапецию

Начнем с задачи про трапецию. Вот ее формулировка:

Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции и точку пересечения ее диагоналей, проходит через середины оснований трапеции.

Как ее решать? Нарисуем трапецию, продолжим ее боковые стороны, проведем диагонали, соединим середины оснований (рис. 1). Мы видим, что образуется много пар подобных треугольников. С подобными фигурами связано отображение плоскости на себя, которое называется *гомотетией*. При гомотетии с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ образом произвольной точки X является точка X_1 такая, что $OX_1 = kOX$. Попробуем решить нашу задачу про трапецию, используя гомотетию.

Пусть S — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$, O — точка пересечения ее диагоналей (см. рис. 1).

Рассмотрим две гомотетии: H_S с центром S и H_O — с цент-

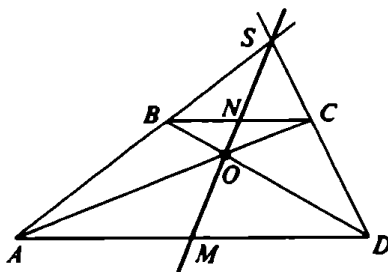


Рис. 1

ром O , переводящие основание AD трапеции в основание BC . Середина M отрезка AD и в той и в другой гомотетии перейдет в середину N отрезка BC , а потому точки M и N лежат на прямой OS , проходящей через центры гомотетий H_S и H_O .

Разберем это решение подробнее.

Гомотетия H_S задается своим центром S и парой соответствующих точек A и B . По свойству гомотетии прямая AD при этом перейдет в параллельную ей прямую BC . Образ точки D будет находиться на прямой BC . С другой стороны, точка, соответствующая точке D , лежит на прямой SD , проходящей через центр гомотетии S .

Таким образом, гомотетия H_S переводит точку D в точку пересечения прямых BC и SD , т. е. в точку C , а основание трапеции AD — в основание BC :

$$H_S(AD) = BC.$$

Аналогично доказывается, что $H_O(AD) = CB$ (гомотетия H_O задается центром O и парой соответствующих точек A и C).

Середину отрезка гомотетия переводит в середину образа этого отрезка, так как при гомотетии все расстояния между точками умножаются на одно и то же число, равное модулю коэффициента гомотетии.

И наконец, середины оснований трапеции, как соответствующие точки гомотетии, лежат на прямой, проходящей через ее центр.

Центр тяжести треугольника

Докажем теперь с помощью результата задачи о трапеции теорему о медианах треугольника, а именно, докажем, что *медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины*.

Доказательство. Пусть AD , BE и CF — медианы треугольника ABC (рис. 2). В трапеции $AFDC$ медианы AD и CF служат диагоналями, а потому точка M их пересечения лежит на прямой, соединяющей середину E основания AC трапеции с точкой пересечения продолжений ее боковых сторон AF и CD , т. е. с вершиной B треугольника. Таким образом, точка M пересечения медиан AD и CF лежит и на медиане BE , т. е. все три медианы треугольника ABC действительно пересекаются в одной точке M . Точка пересечения медиан треугольника и называется его *центром тяжести*.

Далее. Гомотетия H_M , переводящая основание AC трапеции $AFDC$ в основание DF , имеет коэффициент $k = -1/2$, так

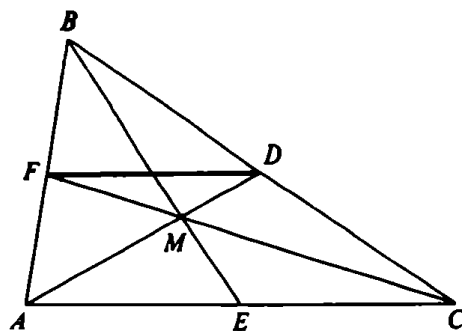


Рис. 2

как $FD = \frac{1}{2} AC$ (FD – средняя линия треугольника ABC). Поэтому $AM : MD = CM : MF = BM : ME = 2 : 1$. Это завершает доказательство теоремы о медианах.

Ортоцентр треугольника

Докажем еще одну теорему.

Высоты треугольника пересекаются в одной точке. (Точка пересечения высот называется ортоцентром треугольника.)

Доказательство. Пусть M – центр тяжести данного треугольника ABC ; F , D и E – середины его сторон (рис. 3). Рассмотрим гомотегию H_M^{-2} с центром в точке M и коэффициентом $k = -2$. Эта гомотегия переводит точки F , D и E соответственно в вершины C , A и B треугольника ABC , а высоты треугольника FDE – в высоты треугольника ABC . Но высоты треугольника FDE , являясь серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ABC , пересекаются в одной точке O – центре описанной около треугольника ABC окружности. Следовательно, их образы (при гомотегии H_M^{-2}) также пересекаются в одной точке R (ортоцентре треугольника ABC).

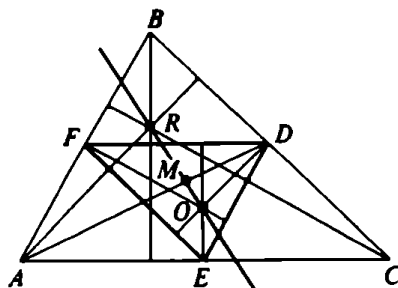


Рис. 3

Попутно мы доказали такое важное следствие:

Центр тяжести M любого треугольника, его ортоцентр R и центр O описанной около него окружности лежат на одной прямой (она называется прямой Эйлера), причем точка M расположена между точками O и R так, что $MR = 2OM$.

Задачи

1. Найдите гомотетии, переводящие один из двух данных параллельных отрезков в другой.

2. На плоскости заданы окружность и две точки A и B на ней. Пусть N – произвольная точка этой окружности, M – центр тяжести треугольника ABN . Найдите множество точек M .

3. На плоскости заданы две концентрические окружности. Проведите хорду в большей из них так, чтобы она делилась меньшей окружностью на три равные части.

4. Две окружности касаются внешним образом. Точки касания общих внешних касательных последовательно соединены. Докажите, что в получившийся четырехугольник можно вписать окружность.

5. Дан острый угол AOB и внутри него точка C . Найдите на стороне OB точку M , равноудаленную от стороны OA и от точки C .

6*. Докажите, что во всяком треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной окружности. (Эта окружность называется *окружностью девяти точек*.)

ШЕСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМЫ О МЕДИАНАХ

В. Дубровский

Кашу маслом не испортишь

Теорема. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в некоторой точке M , причем каждая из них делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины:

$$AM:MA_1 = BM:MB_1 = CM:MC_1 = 2. \quad (*)$$

Во всех приводимых далее доказательствах, кроме шестого, мы устанавливаем только, что медиана BB_1 проходит через точку M , которая делит медиану AA_1 в отношении 2:1. Если в соответствующем рассуждении заменить BB_1 на CC_1 , то мы получим, что и CC_1 проходит через M . Этим будет доказано, что все три медианы пересекаются в некоторой точке M , причем $AM:MA_1 = 2$. Поскольку все медианы равноправны, можно заменить AA_1 на BB_1 или CC_1 ; отсюда вытекает (*).

Первое доказательство. Пусть K — середина отрезка AM , B' — точка пересечения прямой BM со стороной AC . Нам достаточно доказать, что $AB' = B'C$. Через точки K и A параллельно прямой BM проведем отрезки KL и A_1N (рис. 1). Поскольку $AK = KM = MA_1$ и $CA_1 = A_1B$, по теореме Фалеса получаем $AL = LB' = B'N = NC$. Отсюда $AB' = B'C$.

Второе доказательство. Рассмотрим гомотегию $H_M^{-1/2}$. Точка A переходит при этой гомотегии в A_1 . Пусть B переходит в B' (рис. 2). Тогда $\overrightarrow{A_1 B'} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$. С другой стороны, средняя линия $A_1 B_1$ получается из стороны BA при гомотегии $H_C^{1/2}$; таким образом, $\overrightarrow{A_1 B_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$. Итак, $\overrightarrow{A_1 B'} = \overrightarrow{A_1 B_1}$, следовательно, $B' = B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1 B_1 C_1$ гомотетичны, причем центр гомотетии лежит в точке M . По определению гомотетии, точки B , M и $B' = B_1$ лежат на одной прямой.

Третье доказательство. Рассмотрим треугольники MAC и $MA_1 C$ (рис. 3). Их высоты, опущенные из вершины C , совпада-

ют, а длины противолежащих этой вершине сторон относятся как 2:1, поэтому $S_{AMC} = 2S_{A_1MC}$. Аналогично, $S_{AMB} = 2S_{A_1MB}$. Но $S_{A_1MC} = S_{A_1MB}$. Следовательно, $S_{AMC} = S_{AMB} = S_{BMC}$. Таким образом, треугольники MAB , MBC и MCA равновелики. Пусть $B' = BM \cap AC$. Докажем, что $AB' = B'C$. С одной стороны,

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AB'M}}{S_{CB'M}}.$$

С другой стороны,

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AB'B}}{S_{CB'B}}.$$

Итак,

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AB'M}}{S_{CB'M}} = \frac{S_{AB'B}}{S_{CB'B}}.$$

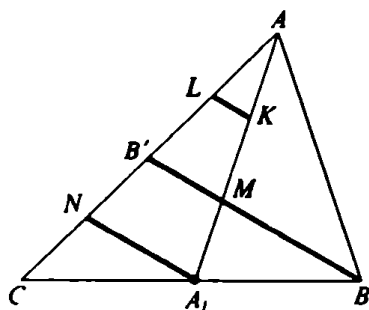


Рис. 1

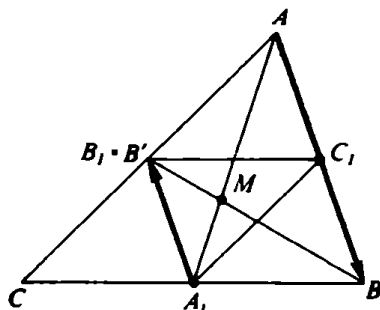


Рис. 2

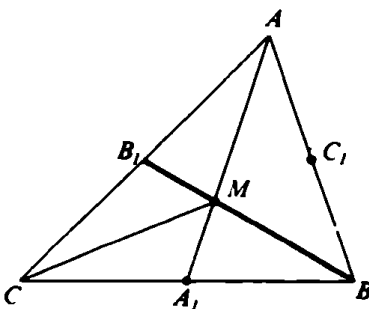


Рис. 3

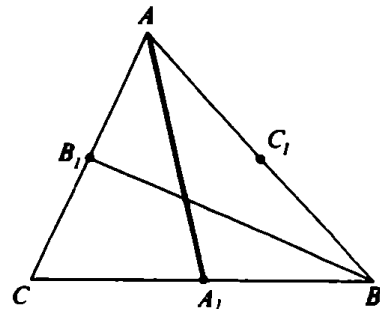


Рис. 4

Пользуясь теоремой $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c-a}{d-b} = \frac{a}{b}$, откуда получаем

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AB'B} - S_{AB'M}}{S_{CB'B} - S_{CB'M}} = \frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = 1.$$

Значит, $AB' = B'C$.

Четвертое доказательство. Из рисунка 4

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \\ &+ \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{BC} + \\ &+ \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \\ &+ \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}. \end{aligned}$$

Следовательно, точка M лежит на медиане BB_1 .

Пятое доказательство. Пусть опять $B' = BM \cap AC$ (рис. 3). Применяя теорему синусов сначала к треугольникам $AB'C$ и $CB'B$, а затем — к треугольникам ABM и A_1BM , и учитывая, что $\sin \angle AB'B = \sin \angle CB'B$, $\sin \angle AMB = \sin \angle A_1MB$, $BC = 2A_1B$ и $MA = 2MA_1$, получим

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB \sin \angle ABM}{\sin \angle AB'B} : \frac{BC \sin \angle A_1BM}{\sin \angle CB'B} = \frac{MA \sin \angle AMB}{2MA_1 \sin \angle A_1MB} = 1.$$

Значит, $AB' = B'C$.

Шестое доказательство. Проведем через точки A и B плоскость α , не содержащую C , и построим в этой плоскости правильный треугольник ABC' (рис. 5). Из общих свойств параллельной проекции следует, что параллельная проекция вдоль прямой CC' переводит $\triangle ABC$ в $\triangle ABC'$, причем медианы $\triangle ABC$ проектируются в медианы треугольника ABC' . Но в правильном треугольнике медианы являются и биссектрисами, а следовательно, пересекаются в одной точке. Легко доказать также (докажите!), что для треугольника ABC' справедливы равенства (*).

Отсюда вытекает, что наша теорема верна и для $\triangle ABC$.

В заключение заметим, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} +$

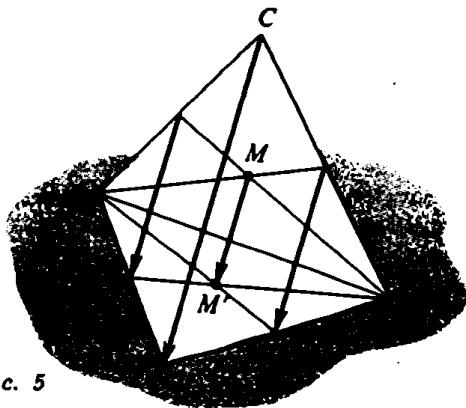


Рис. 5

$$\begin{aligned}
 & + 2\overrightarrow{MA}_1 = \overrightarrow{0}, \text{ а если точка } P \text{ не совпадает с } M, \text{ то } \overrightarrow{PA} + \\
 & + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC} = \\
 & = 3\overrightarrow{PM} \neq \overrightarrow{0}.
 \end{aligned}$$

В общем случае точка G называется *центроидом* (или *центром тяжести*) системы точек A_1, A_2, \dots, A_n , если

$\overrightarrow{GA}_1 + \overrightarrow{GA}_2 + \dots + \overrightarrow{GA}_n = \overrightarrow{0}$. Таким образом, точка пересечения медиан треугольника является центроидом системы его вершин (ее называют также центроидом самого треугольника).

Задачи

1. Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой. Выведите отсюда теорему о медианах.

2. Дан треугольник ABC . Укажите все такие точки P , что $S_{PAB} = S_{PBC} = S_{PCA}$.

3. Через каждое из ребер трехгранного угла и биссектрису противоположного плоского угла проведена плоскость. Докажите, что три полученные плоскости имеют общую прямую.

4. Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC . Известно, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P , причем

$$\frac{AP}{PA_1} = \frac{BP}{PB_1} = \frac{CP}{PC_1}.$$

Докажите, что P — центроид треугольника ABC .

5. Докажите, что центроид треугольника является единственной точкой, в которой сумма квадратов расстояний до вершины треугольника достигает своего минимального значения.

ЧЕТЫРЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ О БИСSEКТРИСЕ

С. Сефибеков

Теорема о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника часто используется, например, при установлении факта пересечения трех биссектрис треугольника в одной точке. Здесь мы дадим сразу несколько ее доказательств.

Теорема. Биссектриса BD внутреннего угла треугольника ABC делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные сторонам BC и BA треугольника.

Первое доказательство. Проведем через точку C (рис. 1) прямую m , параллельную BD . Тогда $m \cap AB = D_1$ и $\triangle ABD \sim \triangle AD_1C$, так как $\angle ABD = \angle CBD = \angle BCD_1 = \angle CD_1B$, получаем $BC = BD_1$ и $\frac{AD_1}{AB} = \frac{AC}{AD}$; отсюда последовательно получаем

$$\frac{AB+BC}{AB} = \frac{AD+DC}{AD}, \quad 1 + \frac{BC}{AB} = 1 + \frac{DC}{AD}, \quad \frac{CB}{AB} = \frac{DC}{AD},$$

что и требовалось доказать.

Второе доказательство. Имеем (см. рис. 1):

$$\frac{S_{CBD}}{S_{ABD}} = \frac{0,5 \cdot CB \cdot DB \cdot \sin \frac{\angle B}{2}}{0,5 \cdot AB \cdot DB \cdot \sin \frac{\angle B}{2}} = \frac{0,5 \cdot CD \cdot h}{0,5 \cdot AD \cdot h},$$

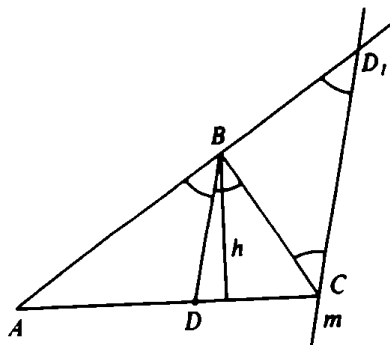


Рис. 1

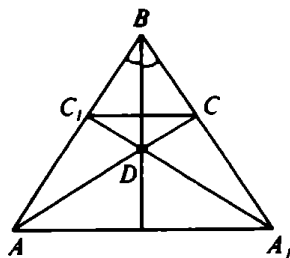


Рис. 2

где h — длина высоты треугольника ABC , проведенной из вершины B . Отсюда

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CD}{AD}.$$

Третье доказательство. По теореме синусов (см. рис. 1)

$$\frac{\sin \frac{\angle B}{2}}{CD} = \frac{\sin \angle C}{BD}$$

$$\text{и } \frac{\sin \frac{\angle B}{2}}{AD} = \frac{\sin \angle A}{BD},$$

или

$$\frac{\sin \frac{\angle B}{2}}{CD \cdot \sin \angle C} = \frac{1}{BD} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \frac{\angle B}{2}}{AD \cdot \sin \angle A} = \frac{1}{BD}.$$

Откуда

$$\frac{\sin \frac{\angle B}{2}}{CD \cdot \sin \angle C} = \frac{\sin \frac{\angle B}{2}}{AD \cdot \sin \angle A},$$

или

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\sin \angle A}{\sin \angle C}, \quad \text{или} \quad \frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AB}.$$

Четвертое доказательство. Выполнив осевую симметрию S треугольника ABC относительно BD (рис. 2), получим

$$S_{BD}(A) = A_1, \quad S_{BD}(C) = C_1 \quad \text{и} \quad S_{BD}(B) = B.$$

Тогда $\triangle CDC_1 \sim \triangle ADA_1$ и $\triangle CC_1B \sim \triangle AA_1B$ (убедитесь в этом!). Отсюда (учитывая, что $AB = A_1B$)

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CC_1}{AA_1}, \quad \frac{CC_1}{AA_1} = \frac{CB}{AB}.$$

Следовательно,

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AB}.$$

ЕЩЕ 13 ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМЫ О БИССЕКТРИСЕ

Б. Иолес

Напомним условие теоремы.

Во всяком треугольнике биссектриса внутреннего угла делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Иными словами, если в треугольнике ABC проведена биссектриса CD , то $AD:BD = AC:BC$.

Приведем еще семь доказательств этой теоремы, шесть из которых вполне доступны восьмиклассникам после прохождения темы «Преобразования фигур».

Очевидно, если $AC = BC$, то теорема верна. Поэтому будем считать, что $AC \neq BC$. Пусть, например, $AC > BC$. Тогда биссектриса CD не может быть перпендикулярна к стороне AB , так как в противном случае прямоугольные треугольники CAD и CBD были бы равны по катету и прилежащему острому углу, откуда следовало бы, что $AC = BC$.

Первое доказательство. Построим на луче CD точку E , такую что $AE = AD$ (рис. 1). Тогда $\angle AEC = \angle ADE = \angle CDB$. Следовательно, треугольники ACE и BCD подобны (по двум углам). Это значит, что $AE:BD = AC:BC$. Приняв во внимание, что $AE = AD$, получим $AD:BD = AC:BC$.

Второе доказательство. Построим на луче CD точку E такую, что $AE = AC$ (рис. 2). Тогда $\angle AED = \angle ACD$, т. е. треугольники AED и BCD подобны. Из их подобия имеем $AD:BD = AE:BC$. Поскольку $AE = AC$, то теорема доказана. Вариант построения — провести через точку A прямую, параллельную CB , до пересечения с прямой CD в точке E .

Третье доказательство. Из вершин A и B опустим перпендикуляры AE и BF на прямую CD (рис. 3). Из подобия прямоугольных треугольников ADE и BDF получим $AD:BD = AE:BF$. В то же время из подобия прямоугольных треугольников ACE и BCF будем иметь $AC:BC = AE:BF$. В полученных пропорциях правые отношения равны, поэтому равны и левые, т. е. $AD:BD = AC:BC$.

Четвертое доказательство. Проведем через точку D прямую, параллельную стороне AC (рис. 4). Тогда по обобщенной

теореме Фалеса $AD:BD=CF:FB$. Из подобия треугольников ABC и DBF имеем $AC:CB=FD:FB$, и так как $CF=FD$, то $AC:BC=CF:FB$. Следовательно, $AD:BD=AC:BC$ (оба отношения равны $CF:FB$).

Пятое доказательство. Площади треугольников, имеющих равные высоты, относятся как соответствующие им основания. Поэтому $S_{CDA}:S_{CDB}=AD:DB$ (рис. 5). С другой стороны, по свойству биссектрисы, высоты в треугольниках CDA и CDB , опущенные из вершины D , равны. Следовательно, $S_{CDA}:S_{CDB}=AC:BC$. Итак, $AD:BD=AC:BC=S_{CDA}:S_{CDB}$.

Шестое доказательство. Опишем вокруг треугольника ABC окружность и продолжим CD до пересечения с окружностью в точке E (рис. 6). Из подобия треугольников ACE и DCB получаем $AC:AE=CD:DB$, т. е. $AC \cdot DB=AE \cdot CD$. Из подо-

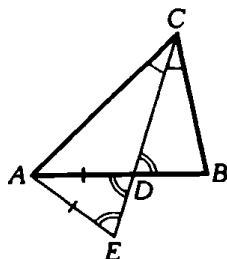


Рис. 1

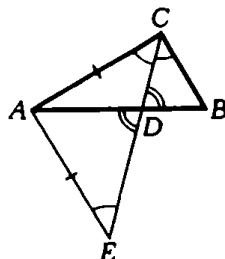


Рис. 2

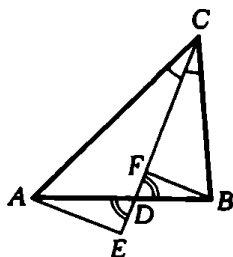


Рис. 3

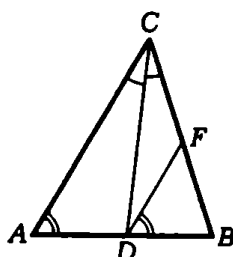


Рис. 4

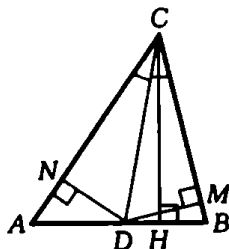


Рис. 5

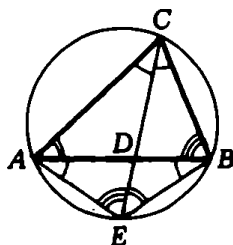


Рис. 6

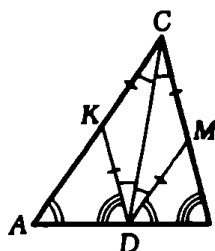


Рис. 7

бия треугольников BCE и DCA имеем $BC:BE = CD:AD$, т. е. $BC \cdot AD = BE \cdot CD$. Заметив, что $AE = BE$, получим $AC \cdot DB = BC \cdot AD$, откуда $AD:BD = AC:BC$.

Седьмое доказательство. Проведем через точку D две прямые, одна из которых параллельна стороне AC и пересекает сторону BC в точке M , а другая параллельна стороне BC и пересекает сторону AC в точке K (рис. 7). Легко доказать, что четырехугольник $KCMD$ — ромб. Из подобия треугольников AKD и DMB имеем $AD:BD = DK:BM$. Так как $DK = DM$, то $AD:BD = DM:BM$. Заменяя в полученной пропорции отношение $DM:BM$ равным ему отношением $AC:BC$ (на основании подобия треугольников ABC и DBM), получим требуемую пропорцию.

С помощью построений, изображенных на рисунках 8–11, читателю предоставляется возможность получить еще **четыре доказательства** этой теоремы.

В заключение наметим еще **два доказательства** теоремы, предназначенные для читателей, знакомых с векторами и геометрическими преобразованиями.

1. Для любой точки D отрезка AB

$$\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{CA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{CB},$$

где $\lambda = DB:AB$, $1 - \lambda = AD:AB$.

$$\begin{aligned} \text{Действительно, } \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \lambda \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB} + \\ &+ \lambda (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = \lambda \overrightarrow{CA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

В нашем случае вектор \overrightarrow{CD} параллелен вектору

$$(1/CA) \cdot \overrightarrow{CA} + (1/CB) \cdot \overrightarrow{CB}$$

(см. рис. 7), и поэтому

$$(1/CA):(1/CB) = \lambda:(1 - \lambda),$$

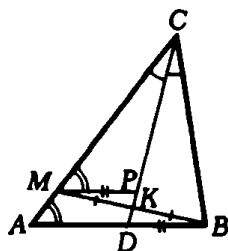


Рис. 8

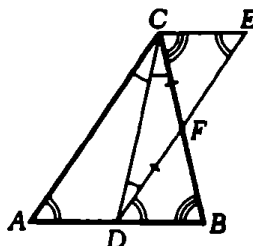


Рис. 9

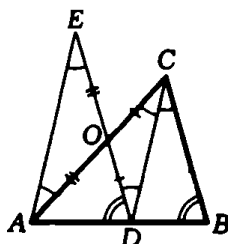


Рис. 10

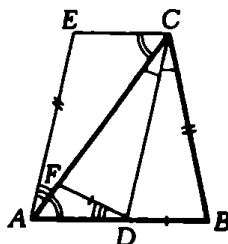


Рис. 11

откуда

$$AD:DB=CA:CB.$$

2. Выполним последовательно симметрию относительно точки D , гомотетию $H_D^{BD/AD}$ и $H_C^{AC/BC}$, а затем симметрию относительно биссектрисы CD (через H_O^k обозначена гомотетия с центром O и коэффициентом k). В результате точка A останется на месте, а прямая CD перейдет в себя, в частности, расстояние между ними сохранится. Следовательно, коэффициент итогового преобразования подобия равен 1, т. е. $(AC/BC) \cdot (BD/AD) = 1$.

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ОБЛЕГЧАЕТ РЕШЕНИЕ

М. Балк, В. Болтянский

Решение многих геометрических задач можно получить, привлекая свойства центра масс (или, как еще говорят, *барицентра* системы материальных точек. Эти «барицентрические» решения используют понятия, заимствованные из механики: масса, материальная точка, центр масс, правило рычага, и опираются на наглядные физические соображения. Как говорил выдающийся французский математик и физик А. Пуанкаре (1854–1912), эти соображения «во-первых, дают нам предчувствие решения, и, во-вторых, подсказывают правильный ход рассуждений». Вместе с тем «барицентрические решения» являются, как мы увидим, математически совершенно строгими.

Материальной точкой будем называть пару (A, m) , где A — произвольная точка, а m — действительное число «масса», которая «сосредоточена» в точке A). Заметим, что в математических приложениях число m можно считать не только положительным (как в механическом понимании массы), но и отрицательным. Чтобы не писать лишних скобок, условимся материальную точку (A, m) обозначать через mA .

Теорема (о центре масс). Пусть задана система материальных точек

$$m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n \quad (1)$$

с ненулевой суммарной массой $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Тогда существует единственная точка Z , удовлетворяющая условию (см. рис. 1)

$$\overrightarrow{m_1 Z A_1} + \overrightarrow{m_2 Z A_2} + \dots + \overrightarrow{m_n Z A_n} = \vec{0}. \quad (2)$$

Эта точка Z называется *центром масс* (или *барицентром*) системы (1).

Доказательство. Фиксируем произвольную точку O . Равенство (2) равносильно соотношению

$$\overrightarrow{m_1 (O A_1 - O Z)} + \overrightarrow{m_2 (O A_2 - O Z)} + \dots + \overrightarrow{m_n (O A_n - O Z)} = \vec{0},$$

$$\begin{aligned}
 (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \overrightarrow{OZ} &= \\
 &= m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OA_n}, \quad (3)
 \end{aligned}$$

или, что то же самое, соотношению

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{m} (m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OA_n}). \quad (4)$$

Так как вектор, стоящий в правой части равенства (4), известен (поскольку точки A_1, A_2, \dots, A_n, O и числа m_1, m_2, \dots, m_n заданы), то точка Z , удовлетворяющая соотношению (4) (а значит, и соотношению (2)), существует и определена однозначно.

Следствие. Пусть Z — центр масс системы материальных точек (1). Тогда для любой точки O справедливы равенства (3) и (4). Обратно, если для какой-либо одной точки O справедливо равенство (3) (или (4)), то Z — центр масс системы (1).

Это непосредственно вытекает из того, что равенства (2), (3) и (4) равносильны.

Другим важным следствием теоремы о центре масс является архимедово

Правило рычага. Если m_1 и m_2 — положительные массы, расположенные в точках A_1 и A_2 , то их барицентр Z находится на отрезке A_1A_2 и делит его обратно пропорционально массам, т. е.

$$A_1Z : A_2Z = m_2 : m_1.$$

Доказательство. Согласно формуле (2),

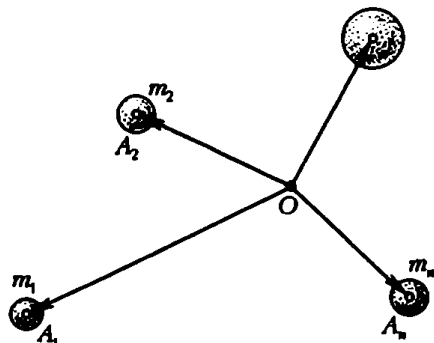


Рис. 1

$$\overrightarrow{m_1 Z A_1} + \overrightarrow{m_2 Z A_2} = \vec{0}.$$

Это равенство означает, что векторы $\overrightarrow{m_1 Z A_1}$ и $\overrightarrow{m_2 Z A_2}$ имеют одинаковые длины (и противоположно направлены). Значит,

$$\overrightarrow{m_1 Z A_1} = -\overrightarrow{m_2 Z A_2},$$

откуда

$$A_1 Z : A_2 Z = m_2 : m_1.$$

Задачи

1. Докажите, что центр масс материальных точек $m_1 A_1$ и $m_2 A_2$ ($m_1 + m_2 \neq 0$) в том и только в том случае расположен в середине отрезка $A_1 A_2$, когда $m_1 = m_2$.

2. Дано, что $\overrightarrow{A_0 A_1} = \overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{A_2 A_3} = \overrightarrow{A_3 A_4} = \overrightarrow{A_4 A_5} \neq \vec{0}$. При каком m барицентр материальных точек $3A_0$ и $m A_5$ располагается в точке A_3 ? При каком p барицентр материальных точек $3A_0$ и $p A_2$ располагается в точке A_5 ?

3. Дано, что $\overrightarrow{BM} = (0,7) \overrightarrow{BA}$. Какими массами следует загрузить точки A и B , чтобы барицентром двух получившихся материальных точек оказалась точка M ?

4. В вершинах параллелограмма $ABCD$ расположены такие массы m_A, m_B, m_C, m_D (с ненулевой суммарной массой), что центр масс получающихся четырех материальных точек совпадает с центром параллелограмма. Докажите, что $m_A = m_C$ и $m_B = m_D$.

5. Докажите, что если в трех вершинах A, B, C параллелограмма $ABCD$ поместить массы 1, -1, 1, то их барицентром будет четвертая вершина.

6. В вершинах A, B, C параллелограмма $ABCD$ помещены массы m_1, m_2, m_3 . Докажите, что барицентр этих трех материальных точек совпадает с барицентром трех других материальных точек: $(m_1 + m_2) A, (m_2 + m_3) C, -m_2 D$.

7. Пусть (1) – система материальных точек (на плоскости или в пространстве) и f – такое перемещение (плоскости или пространства), при котором система (1) переходит в себя, т. е. система материальных точек $m_1 f(A_1), m_2 f(A_2), \dots, m_n f(A_n)$ совпадает с точностью до порядка с исходной системой (1). Докажите, что барицентр Z системы (1) является неподвижной точкой перемещения f , т. е. $g(Z) = Z$.

8. Докажите, что если система (1) симметрична относительно плоскости α , то ее центр масс лежит в плоскости α .

9. Докажите, что если система (1) переходит в себя при повороте вокруг некоторой прямой l на угол φ , где $0 < \varphi < 2\pi$, то центр масс системы (1) принадлежит прямой l .

10. Система (1) переходит в себя при повороте на некоторый угол вокруг прямой l_1 , а также при повороте на некоторый угол вокруг прямой l_2 (углы поворота заключены между 0 и 2π). Докажите, что прямые l_1 и l_2 пересекаются и их точка пересечения является центром масс системы (1).

11. Многоугольник $A_1 A_2 \dots A_n$ переходит в себя при повороте вокруг точки O на угол φ , где $0 < \varphi < 2\pi$. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = 0$.

Теорема (о группировке масс). Пусть в системе материальных точек (1) отмечены k точек $m_1 A_1, \dots, m_k A_k$, причем $m_1 + \dots + m_k \neq 0$, $m_1 + \dots + m_n \neq 0$. Если всю массу отмеченных точек сосредоточить в их барицентре C , то от этого положение барицентра Z всей системы (1) не изменится. Иначе говоря, система материальных точек $(m_1 + \dots + m_k) C, m_{k+1} A_{k+1}, \dots, m_n A_n$ и исходная система (1) имеют один и тот же центр масс.

Доказательство. Фиксируем точку O . Так как Z — центр масс системы (1), а C — центр масс отмеченных материальных точек, то

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + \dots + m_k + m_{k+1} + \dots + m_n) \overrightarrow{OZ} &= \\ &= m_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + m_k \overrightarrow{OA_k} + m_{k+1} \overrightarrow{OA_{k+1}} + \dots + m_n \overrightarrow{OA_n}, \\ (m_1 + \dots + m_k) \overrightarrow{OC} &= m_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + m_k \overrightarrow{OA_k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (m_1 + \dots + m_k + m_{k+1} + \dots + m_n) \overrightarrow{OZ} &= \\ &= (m_1 + \dots + m_k) \overrightarrow{OC} + m_{k+1} \overrightarrow{OA_{k+1}} + \dots + m_n \overrightarrow{OA_n}, \end{aligned}$$

а это и значит, что центром масс системы материальных точек $(m_1 + \dots + m_k) C, m_{k+1} A_{k+1}, \dots, m_n A_n$ является та же точка Z .

Пример 1. Докажите, что медианы произвольного треугольника пересекаются в одной точке и каждая медиана делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.

Решение. Пусть AA', BB', CC' — медианы треугольника ABC (рис. 2), а Z — центр масс трех материальных точек $1A,$

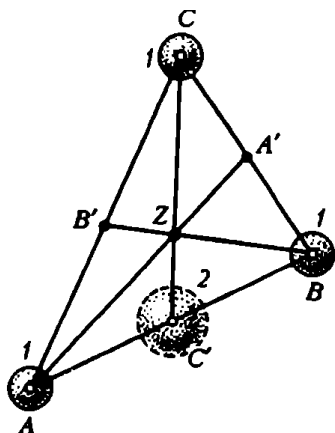


Рис. 2

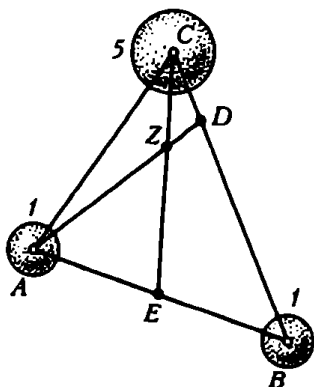


Рис. 3

1B, 1C. Так как C' является центром масс двух материальных точек $1A$ и $1B$, то, сосредоточив массы точек A и B в точке C' , мы получим, согласно предыдущей теореме, что Z совпадает с центром масс двух материальных точек $2C'$ и $1C$. Следовательно, $Z \in CC'$ и $CZ: C'Z = 2:1$. Аналогично доказывается, что точка Z принадлежит двум другим медианам и делит каждую из них в отношении $2:1$.

Замечание. Можно условиться в формулах (3), (4) не писать букву O и стрелки над векторами, т. е. применять вместо (3) и (4) сокращенные записи:

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_k)Z = m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_n A_n, \quad (3')$$

$$Z = \frac{m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_n A_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (4')$$

Такая форма записи сокращает решение задач. Например, решение примера 1 можно будет изложить следующим образом. Пусть Z — барицентр точек $1A, 1B, 1C$. Тогда

$$Z = \frac{1A + 1B + 1C}{3} = \frac{(1A + 1B) + 1C}{3} = \frac{2C' + 1C}{3},$$

т. е. Z — центр масс материальных точек $2C'$ и $1C$, и потому $Z \in CC'$ и $CZ: C'Z = 2:1$. Для двух других медиан рассуждение аналогично.

Пример 2. На стороне BC треугольника ABC взята такая точка D , что $BD:DC = 5:1$ (рис. 3). В каком отношении медиана CE делит отрезок AD ?

Решение. Рассмотрим материальные точки $1A, 1B, 5C$ { так что $E = \frac{1A + 1B}{2}$, $D = \frac{1B + 5C}{6}$ } и обозначим через Z барицентр

этих трех материальных точек. Тогда

$$Z = \frac{1A+1B+5C}{7} = \frac{(1A+1B)+5C}{7} = \frac{2E+5C}{7},$$

и потому $Z \in CE$; далее,

$$Z = \frac{1A+1B+5C}{7} = \frac{1A+(1B+5C)}{7} = \frac{1A+6D}{7},$$

т. е. $Z \in AD$. Следовательно, Z — точка пересечения отрезков CE и AD . Из равенства $Z = \frac{1A+6D}{7}$ по правилу рычага вытекает, что $AZ:ZD = 6:1$.

Следующие два примера показывают, что иногда удобно поместить в одной и той же точке несколько масс.

Пример 3. В треугольнике CAB (рис. 4) проведена медиана CD . На сторонах CA и CB выбраны такие точки K и L , что $CK = 4KA$, $2CL = LB$. В каком отношении точка P пересечения прямых KL и CD делит медиану CD ? В каком отношении точка P делит отрезок KL ?

Решение. Рассмотрим систему материальных точек $1C, 4A, 4B, 8C$ [так что $K = \frac{1C+4A}{5}$, $D = \frac{1A+4B}{8}$, $L = \frac{4B+8C}{12}$] и обозначим через P барицентр этой системы. Тогда

$$P = \frac{1C+4A+4B+8C}{17} = \frac{(1C+4A)+(4B+8C)}{17} = \frac{5K+12L}{17},$$

т. е. $P \in KL$;

$$P = \frac{(4A+4B)+(1C+8C)}{17} = \frac{8D+9C}{17},$$

т. е. $P \in CD$.

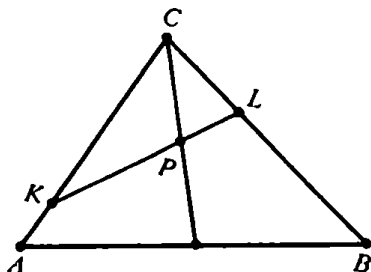


Рис. 4

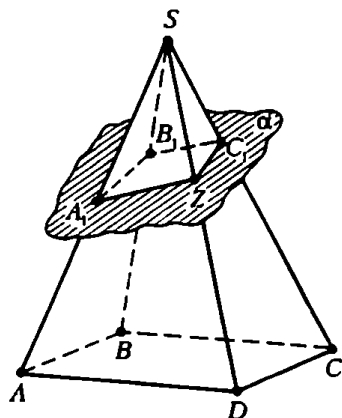


Рис. 5

Следовательно, P есть точка пересечения отрезков KL и CD . Из написанных равенств вытекает, согласно правилу рычага, что $KP:PL=12:5$, $CP:PD=8:9$.

Пример 4. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$ (рис. 5). Плоскость α отсекает от трех боковых ребер SA , SB , SC соответственно треть, четверть, пятую часть (считая от вершины S). Какую часть отсекает она от четвертого бокового ребра?

Решение. Пусть A_1 , B_1 , C_1 — точки пересечения плоскости α с ребрами SA , SB , SC . Поместим в точках A , B , C , в которых оканчиваются эти ребра, соответственно массы 1, -1, 1 (так, чтобы центром масс получившихся трех материальных точек был конец D четвертого ребра, см. задачу 5). Далее, в точке S поместим такие три массы, чтобы вместе с уже взятыми материальными точками $1A$, $(-1)B$, $1C$ они имели в качестве центров масс точки A_1 , B_1 , C_1 . Так как, по условию,

$$SA_1 : A_1A = 1:2, \quad SB_1 : B_1B = 1:3,$$

$$SC_1 : C_1C = 1:4,$$

мы получаем

$$A_1 = \frac{1A+2S}{3}, \quad B_1 = \frac{(-1)B+(-3)C}{-4}, \quad C_1 = \frac{1C+4S}{5}.$$

Обозначим через Z центр масс всех шести материальных точек $1A$, $(-1)B$, $1C$, $2S$, $(-3)S$, $4S$. Тогда

$$Z = \frac{(1A+2S)+((-1)B+(-3)S)+(1C+4S)}{4} = \frac{3A_1+(-4)B_1+5C_1}{4},$$

откуда видно, что $Z \in \alpha$. Далее,

$$Z = \frac{(1A+(-1)B+1C)+(2S+(-3)S+4S)}{4} = \frac{1D+3S}{4},$$

откуда видно, что $Z \in SD$. Следовательно, Z — искомая точка пересечения плоскости α с ребром SD . Из равенства $Z = \frac{1D+3S}{4}$ следует, согласно правилу рычага, что $SZ:ZD=1:3$, и потому $SZ = \frac{1}{4}SD$.

Задачи

12. Пусть в вершинах A , B , C некоторого треугольника помещены положительные массы m_A , m_B , m_C и Z — барицентр этих трех материальных точек. Обозначим через A' точку пересечения прямой AZ со стороной BC . Докажите, что A' — центр масс двух материальных точек m_B и m_C .

13. Пусть в вершинах A, B, C некоторого треугольника помещены массы m_A, m_B, m_C . Обозначим через A' барицентр материальных точек $m_B B$ и $m_C C$, через B' – барицентр материальных точек $m_C C$ и $m_A A$, а через C' – барицентр материальных точек $m_A A$ и $m_B B$. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

14. Пусть в системе (1) отмечены k точек $m_1 A_1, \dots, m_k A_k$ и пусть C – барицентр отмеченных материальных точек, а D – барицентр остальных точек $m_{k+1} A_{k+1}, \dots, m_n A_n$ (предполагается, что $m_1 + \dots + m_k \neq 0, m_{k+1} + \dots + m_n \neq 0, m_1 + \dots + m_n \neq 0$). Докажите, что барицентр двух материальных точек $(m_1 + \dots + m_k) C$ и $(m_{k+1} + \dots + m_n) D$ совпадает с барицентром Z исходной системы (1).

15. Из четырех точек A, B, C, D никакие три не лежат на одной прямой. Точки M и N – середины отрезков AB и CD , Z – середина отрезка MN , P – точка пересечения медиан треугольника BCD . Лежат ли точки A, Z, P на одной прямой?

16. В четырехугольнике $ABCD$ отрезок KL соединяет середины двух противоположных сторон, отрезок MN соединяет середины двух других противоположных сторон, а отрезок PQ соединяет середины диагоналей. Докажите, что отрезки KL, MN и PQ пересекаются в одной точке Z и каждый из них делится в этой точке пополам.

17. В четырехугольнике $ABCD$ точки пересечения медиан треугольников BCD, ACD, ABD, ABC обозначены через A', B', C', D' . Докажите, что каждый из отрезков AA', BB', CC', DD' проходит через точку Z , рассмотренную в предыдущей задаче, и делится точкой Z в отношении 3:1, считая от вершин четырехугольника.

18. В тетраэдре проведены три отрезка, каждый из которых соединяет середины двух противоположных ребер. Докажите, что эти три отрезка пересекаются в одной точке Z и каждый из них делится в этой точке пополам.

19. В тетраэдре проведены четыре отрезка, каждый из которых соединяет одну из вершин с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что эти четыре отрезка пересекаются в точке Z , рассмотренной в предыдущей задаче, и делятся этой точкой в отношении 3:1, считая от вершин.

20. На сторонах шестиугольника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ последовательно отмечены их середины $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$. Будет ли точка пересечения медиан треугольника $B_1 B_3 B_5$ совпадать с точкой пересечения медиан треугольника $B_2 B_4 B_6$?

21. Даны шесть точек, из которых никакие три не принадлежат одной прямой. Точка пересечения медиан треугольника с вершинами в каких-либо трех из этих точек соединена отрезком с точкой пересечения медиан треугольника с вершинами в остальных трех точках. Докажите, что все возникающие таким образом 10 отрезков имеют общую середину.

22. Противоположные стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ разделены точками M и N в одном и том же отношении k (т. е.

$$\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{MB}, \quad \overrightarrow{DN} = k \overrightarrow{NC};$$

P и Q – середины сторон AD и BC . В каком отношении делится каждый из отрезков MN и PQ точкой их пересечения?

23. Противоположные звенья AB и DC пространственной замкнутой ломаной $ABCD$ разделены точками M и N в одном и том же отношении k ; отрезки BC , MN , AD разделены точками P , Q , R в одном и том же отношении l . Докажите, что точки P , Q , R лежат на одной прямой.

24. Звенья AB , BC , CD , DA пространственной замкнутой ломаной $ABCD$ разделены точками M , N , P , Q соответственно в отношениях $\alpha:\beta$, $\beta:\gamma$, $\gamma:\delta$, $\delta:\alpha$, где α , β , γ , δ – положительные числа. Докажите, что точки M , N , P , Q лежат в одной плоскости. В каком отношении делятся отрезки MP и NQ точкой их пересечения?

25. Каждое звено замкнутой пространственной ломаной $A_1A_2...A_{2n}A_1$ пересекает плоскость α в одной точке, причем звено A_iA_{i+1} делится точкой пересечения с плоскостью α в отношении k_i ($i = 1, 2, ..., 2n - 1$). В каком отношении звено $A_{2n}A_1$ делится точкой пересечения с плоскостью α ?

26. На сторонах треугольника ABC взяты такие точки M и N , что $CN = \alpha CA$, $CM = \beta CB$. Пусть S – точка пересечения прямых AM и BN . Вычислите отношения $AS:AM$, $BS:BN$.

27. На сторонах KL и LM треугольника KLM взяты такие точки A и B , что $LA = 3AK$, $LB = 4BM$. Вычислите отношение площадей треугольников KLM и KLC , где C – точка пересечения прямых AM и KB .

28. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC взяты такие точки C_1 , A_1 , B_1 , что $AC_1 = \frac{1}{3}AB$, $BA_1 = \frac{1}{3}BC$, $CB_1 = \frac{1}{3}CA$. При пересечении отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 образовался треугольник $A_2B_2C_2$. Найдите отношение площадей треугольников $A_2B_2C_2$ и ABC .

Указание. Найдите, в каком отношении точка A_2 делит отрезки BB_1 и CC_1 (и, аналогично, для точек B_2 и C_2).

29. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1. Точка M делит сторону BC в отношении 3:5. Вычислите площадь четырехугольника $CMPD$, где P – точка пересечения прямых AM и BD .

30. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка M , отсекающая $\frac{1}{n}$ часть этой стороны, т. е. $AM = \frac{1}{n}AB$. Какую часть диагонали AC отсекает прямая DM ?

31. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон BC , CA , AB соответственно в точках A' , B' , C' . Докажите, что отрезки AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке.

Указание. Введем обозначения: $AC' = AB' = p$, $BC' = BA' = q$, $CA' = CB' = r$ (рис. 6). Загрузим вершины A , B , C массами $1/p$, $1/q$,

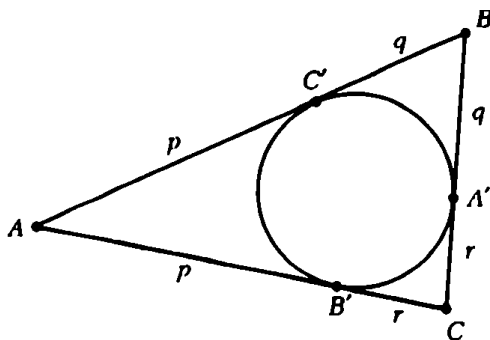


Рис. 6

1/г. Убедитесь, что C' – барицентр двух материальных точек $\frac{1}{p}A$ и $\frac{1}{q}B$, и потому (по теореме о группировке масс) барицентр Z системы материальных точек $\frac{1}{p}A, \frac{1}{q}B, \frac{1}{r}C$ лежит на отрезке CC' . Аналогично проверьте, что $Z \in AA'$ и $Z \in BB'$.

32. В угол PAQ вписана окружность, которая касается сторон угла в точках P и Q . Прямая BC ($B \in AP, Q \in AQ$) касается окружности в точке T . Прямые BQ и CP пересекаются в точке M . Лежат ли точки M, T, A на одной прямой?

33. На сторонах треугольника ABC или на их продолжениях вы-
 $\xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad}$
 браны такие точки A_1, B_1, C_1 , что $BA_1 = \alpha A_1 C, CB_1 = \beta B_1 A,$
 $\xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad}$
 $AC_1 = \gamma C_1 B$. Докажите, что если $\alpha\beta\gamma = -1$, то точки A_1, B_1, C_1 ле-
 жат на одной прямой (теорема Менелая).

Указание. Рассмотрите систему из четырех материальных точек $1A, \gamma B, (-1)A, \alpha\gamma C$.

34. Докажите, что если при обозначениях предыдущей задачи выполнено равенство $\alpha\beta\gamma = 1$, то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны (теорема Чебы).

Указание. Загрузите вершины A, B, C массами $1, \gamma, \alpha\gamma$ и дока-
 жите, что при $1 + \gamma + \alpha\gamma \neq 0$ центр масс этих трех материальных точек
 принадлежит каждой из прямых AA_1, BB_1, CC_1 .

35. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α отсекает от трех боковых ребер SA, SB, SC соот-
 ветственно половину, две трети, три четверти (считая от вершины S).
 Какую часть отсекает она от четвертого бокового ребра?

Все хорошо знают, что математика постоянно используется в физике. Реже встречается и потому менее известно обратное — использование физических понятий в математике. Один яркий пример такого рода — *центр масс* в геометрии — обсуждался в статье М. Балка и В. Болтянского. В нашей статье главную роль играет понятие, также заимствованное из механики, — *момент инерции*.

Но когда с понятием, взятым из физики, начинает работать математик, он быстро забывает его физический смысл и видит в нем лишь полезную математическую формулу. Так, понятие *материальной точки* A массы m , которую физики воспринимают как «тело массы m пренебрежимо малых размеров для данной задачи», математик определяет формально, как «пару (A, m) , состоящую из точки A (геометрической) и действительного числа $m \in \mathbb{R}$ ». Физик дважды подумает, прежде чем воспользуется «отрицательной массой», а математик будет рассматривать как ни в чем не бывало «материальную точку» (A, m) , для которой $m < 0$! И притом с пользой для дела (см. цитированную выше статью, например задачу 5). Подобным же образом мы здесь определим момент инерции чисто математическим выражением. А выведенная затем формула Лагранжа для вычисления момента инерции станет ключом в своеобразную кунсткамеру геометрии, с множеством диких теорем и формул. Об этом наш рассказ.

Предваряя возможный вопрос любознательного читателя, поясним все же физический смысл момента инерции. Это легко сделать, отправляясь от второго закона Ньютона. При вращательном движении второй закон Ньютона записывается в виде $M = I\alpha$, где M — момент прикладываемой силы, α — угловое ускорение, а I и есть как раз момент инерции. Сравнивая эту формулу с $F = ma$, мы видим, что момент инерции представляет собой меру инерции вращающегося тела, подобно тому, как масса представляет собой меру инерции при поступательном движении.

Что нужно знать о центре масс

Коротко напомним все необходимые нам сведения о центре масс (подробности можно найти в упомянутой статье М. Балка и В. Болтянского).

Рассмотрим систему из n материальных точек (или точечных масс), т. е. n пар $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$, где A_i — действительные числа, m_i — «массы», сосредоточенные в этих точках); более короткое и удобное обозначение для этой системы — $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$. Если общая масса $m = m_1 + \dots + m_n \neq 0$, то

- 1) существует единственная такая точка Z , что

$$\overrightarrow{m_1 Z A_1} + \dots + \overrightarrow{m_n Z A_n} = 0,$$

эта точка называется *центром масс* системы $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$;

- 2) для любой точки P имеет место равенство

$$\overrightarrow{P Z} = \frac{1}{m} (\overrightarrow{m_1 P A_1} + \dots + \overrightarrow{m_n P A_n}); \quad (1)$$

3) (*теорема о группировке*) при замене части материальных точек системы $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$, например точек $m_1 A_1, \dots, m_k A_k$ на их центр масс C , в который помещена их общая масса $m' = m_1 + \dots + m_k$, положение центра масс всей системы не меняется, т. е. центры масс систем $m' C, m_{k+1} A_{k+1}, \dots, m_n A_n$ и $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$ совпадают.

Непосредственно из определения следует, что центр Z двух точечных масс $m_1 A_1$ и $m_2 A_2$ находится по известному правилу

рычага: точка Z лежит на прямой $A_1 A_2$ и $\overrightarrow{A_1 Z} : \overrightarrow{Z A_2} = m_2 : m_1$ (в левой части — коэффициент пропорциональности двух коллинеарных векторов).

Задачи

1. Пусть a, b, c — длины сторон BC, CA, AB треугольника ABC . Докажите, что центр его вписанной окружности является центром масс системы aA, bB, cC . (Указание. Пользуясь тем, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам*, докажите, что, например, барицентр материальных точек bB и cC — основание биссектрисы угла A ; примените теорему о группировке.)

2. Рассмотрим три невписанные окружности треугольника ABC — окружности, касающиеся (извне) одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон (рис. 1). Пусть A_1, B_1, C_1 — точки их касания со сторонами BC, CA, AB . Докажите, что а) отрез-

* См., например, статью С. Сефибекова «Четыре доказательства теоремы о биссектрисе» в настоящем сборнике.

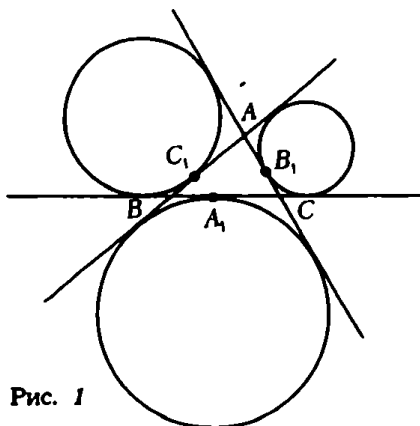


Рис. 1

ки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке N (точке Нагеля),
 б) точка пересечения медиан M треугольника лежит на отрезке ZN ,
 где Z — центр вписанной окружности, и $ZM:MN = 1:2$.

Момент инерции и формула Лагранжа

Моментом инерции системы материальных точек

$$m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n$$

относительно фиксированной точки P называется число

$$I_P = m_1 PA_1^2 + m_2 PA_2^2 + \dots + m_n PA_n^2. \quad (2)$$

Впервые это понятие было введено великим Л. Эйлером (1708–1783).

Для любителей физики отметим, что в механике обычно рассматривается, собственно говоря, момент инерции системы точек относительно оси, равный сумме $m_1 d_1^2 + \dots + m_n d_n^2$, где d_i — расстояние от точки A_i до этой оси (его произведение на угловую скорость вращения систем вокруг оси равно моменту импульса системы). Он совпадает с I_P , когда точка P и все точки A_i лежат в одной плоскости, а ось перпендикулярна ей и проходит через P .

Формулу (2) можно записать короче, обозначив расстояние от A_i до P через r_i и воспользовавшись знаком суммы Σ^* :

* Этот знак позволяет кратко записывать суммы из многих слагаемых: вместо $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ мы пишем $\sum_{i=1}^n A_i$ или просто

$$I_P = \sum_i m_i r_i^2. \quad (3)$$

Формулам (3) и (2) можно придать другую форму. Пусть P и O — две произвольные точки, тогда

$$\begin{aligned} I_P &= \sum_i m_i PA_i^2 = \sum_i (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_i})^2 = \\ &= \sum_i m_i PQ^2 + 2 \sum_i m_i \cdot \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QA_i} + \sum_i m_i QA_i^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$I_P = I_Q + m \overrightarrow{PQ}^2 + 2 \overrightarrow{PQ} \cdot \left[\sum_i m_i \overrightarrow{QA_i} \right]. \quad (4)$$

Если теперь в качестве Q взять центр масс Z нашей системы, то, поскольку $\sum_i m_i \overrightarrow{ZA_i} = \vec{0}$ (по определению центра масс), мы получим

$$I_P = I_Z + m PZ^2. \quad (5)$$

В конце статьи мы покажем, что момент инерции относительно центра масс выражается, если $m \neq 0$, следующей красивой формулой:

$$I_Z = \frac{1}{m} \sum_{i < j} m_i m_j A_i A_j^2, \quad (6)$$

и, следовательно, для любой точки P

$$I_P = \left[\frac{1}{m} \sum_{i < j} m_i m_j A_i A_j^2 \right] + m PZ^2. \quad (7)$$

$\sum_i A_i$ (когда число слагаемых n ясно из контекста). Аналогично,

$\sum_i m_i r_i^2$ — сокращение для $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$ и т. п.

Формулы (5) – (7) называются *формулами Лагранжа*, на них основывается все дальнейшее.

Математика – это искусство называть разные вещи одинаково, а одинаковые – по-разному

Шутливый афоризм, вынесенный в заголовок, имеет глубокий смысл. Математические теоремы отражают самые общие закономерности, поэтому одна и та же теорема в разных обличьях может встретиться нам в ситуациях, не имеющих на первый взгляд ничего общего. Хорошим, хотя и очень элементарным, примером служит формула (5).

Перепишем ее в «нейтральных» обозначениях, отвлекаясь от смысла входящих в нее величин. Пусть x_1, \dots, x_n – какой-то набор векторов, c_1, \dots, c_n – набор чисел, $c = c_1 + \dots + c_n \neq 0$, $x_0 = (c_1 x_1 + \dots + c_n x_n) / c$, $y_i = x_i - x_0$ при $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$c_1 x_1^2 + \dots + c_n x_n^2 = (c_1 y_1^2 + \dots + c_n y_n^2) + c x_0^2 \quad (8)$$

(x_i^2 , y_i^2 нужно понимать как скалярные квадраты векторов x_i , y_i). Доказывать эту формулу нам уже не нужно, потому что всегда можно считать, что $x_i = \overrightarrow{PA_i}$, тогда $x_0 = \overrightarrow{PZ}$, где Z – барицентр системы материальных точек $c_1 A_1, \dots, c_n A_n$, и формула (8) превращается в формулу Лагранжа (5).

Теперь приведем еще три интерпретации этой формулы.

1) Пусть x_1, \dots, x_n – векторы перпендикуляров, опущенных из точек A_1, \dots, A_n на ось l (рис. 2), c_1, \dots, c_n – массы, помещенные в эти точки. Тогда x_0 – это вектор перпендикуляра из их барицентра Z на ось l (почему?), а y_i – векторы перпенди-

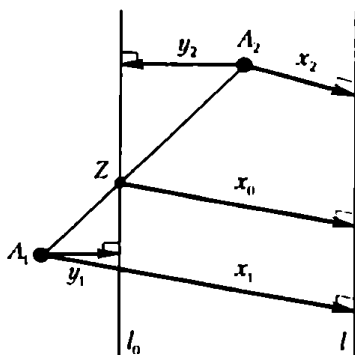


Рис. 2

куляров из точек A_i на ось l_0 , проведенную через точку Z параллельно l . В этом случае (8) принимает вид *теоремы Штейнера*:

$$I_l = I_{l_0} + md^2$$

(здесь I_l и I_{l_0} — моменты инерции системы $c_1 A_1, \dots, c_n A_n$ относительно осей l и l_0 , $m = c$ — общая масса, d — расстояние между осями).

2) Пусть n частиц A_1, \dots, A_n с массами m_1, \dots, m_n движутся равномерно и прямолинейно со скоростями $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ относительно некоторой системы отсчета S . Тогда их центр масс движется в системе S со скоростью $\vec{v}_0 = (m_1 \vec{v}_1 + \dots + m_n \vec{v}_n)/m$ ($m = m_1 + \dots + m_n$). Скорость частицы A_i в системе покоя центра масс по правилу сложения скоростей равна $\vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_0$. Пусть E и E_0 — полные кинетические энергии всех частиц в системе S и в системе центра масс, т. е.

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2},$$

$$E_0 = \frac{m u^2}{2} + \dots + \frac{m_n u_n^2}{2}.$$

Полагая в (8) $x_i = \vec{v}_i$, $c_i = m_i/2$, получим *теорему Кенига* о кинетической энергии:

$$E = E_0 + \frac{mv^2}{2}$$

(полная кинетическая энергия системы частиц равна энергии их движения относительно центра масс плюс энергия движения центра масс).

Последний пример — из совершенно другой области — теории вероятностей.

3) Пусть в некотором эксперименте со случайным исходом измеряется некая величина X , например бросают игральную кость и определяют выпавшее число очков. Предположим, что в зависимости от результата эксперимента, величина X может принимать n значений x_1, \dots, x_n (в примере с костью — 6 значений 1, 2, ..., 6), причем значение x_i принимается с вероятностью p_i (числа p_i неотрицательны и дают в сумме 1; в нашем примере, очевидно, все значения равновероятны, т. е. $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$). Число $p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$ называется *средним значением* (или *математическим ожиданием*) случай-

ной величины X и обозначается MX (в нашем примере $MX = (1 + \dots + 6)/6 = 3,5$). Таким образом, с точки зрения теории вероятностей выражения, входящие в (8) (при $c_i = p_i$, $c = \sum_i p_i = 1$), можно интерпретировать так*:

$$p_1 x_1^2 + \dots + p_n x_n^2 = MX^2$$

– среднее значение случайной величины X^2 или, как говорят, *второй момент* (снова «момент»!) случайной величины X ; $y_i = x_i - x_0 = x_i - MX$ – отклонения значений величины X от среднего значения:

$$p_1 y_1^2 + \dots + p_n y_n^2 = M(X - MX)^2$$

– среднее значение квадрата отклонения X от MX ; это очень важная характеристика случайной величины, показывающая степень ее «разброса» вокруг среднего значения, она называется *дисперсией* и обозначается DX ; $x_0^2 = (MX)^2$.

В результате (8) превращается в формулу для вычисления дисперсии, имеющуюся во всех учебниках теории вероятностей (правда, не носящую ничьих звучных имен):

$$DX = MX^2 - (MX)^2.$$

Легко ли здесь узнать формулу Лагранжа?

Задача 3. Найдите дисперсию числа очков при бросании кости.

Геометрические следствия

Формула Стюарта. Найдём расстояние d от вершины A треугольника ABC до точки D на стороне BC , зная длины a , b , c сторон треугольника и длины отрезков BD и DC (рис. 3). Пусть $p = BD : BC$, $q = DC : BC$, тогда D – это центр масс системы материальных точек qB , pC . Вычисляя момент инерции этой системы относительно точки A , получим (см. (7))

$$I_A = pb^2 + qc^2 = \frac{pq a^2}{p + q} + (p + q)d^2$$

* Формула (8) верна и в случае, когда x_i – числа: можно просто считать их векторами с координатами $(x_i; 0; 0)$. С другой стороны, ее можно применять к случайным величинам, принимающим векторные значения.

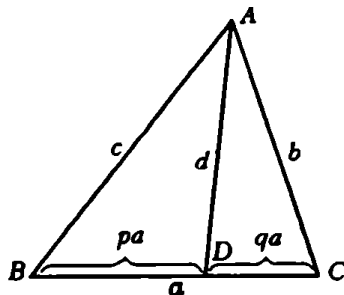


Рис. 3

и, поскольку $p + q = 1$,

$$d^2 = pb^2 + qc^2 - pqa^2.$$

Окружность Аполлония. Так называют окружность, определяемую тем, что отношение расстояний от любой ее точки до двух данных точек A и B постоянно. Докажем, пользуясь моментом инерции, что множество точек P плоскости, удовлетворяющих условию $PA : PB = k \neq 1$, — действительно окружность. Перепишем это условие в виде $I_P = PA^2 - k^2 PB^2 = 0$.

Поскольку I_P — это момент инерции системы $1A, (-k^2)B$ относительно точки P , по формуле (5)

$$I_P = I_Z + (1 - k^2)PZ^2,$$

где Z — центр масс этой системы. Следовательно, рассматриваемое множество есть окружность (рис. 4) с центром Z радиусом $\sqrt{I_Z/(k^2 - 1)}$. (Проверьте, что подкоренное выражение больше нуля, и выразите радиус окружности через k и AB . Где находится ее центр?)

Радикальная ось. Покажем, что множество точек P , касательные из которых к двум данным непересекающимся окружностям равны, есть прямая. (Эта прямая называется *радикальной осью* пары окружностей.) Пусть O_1 и O_2 — центры, R_1 и R_2 — радиусы окружностей. Условие равенства длин касатель-

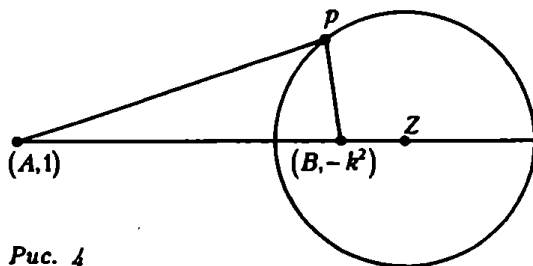


Рис. 4

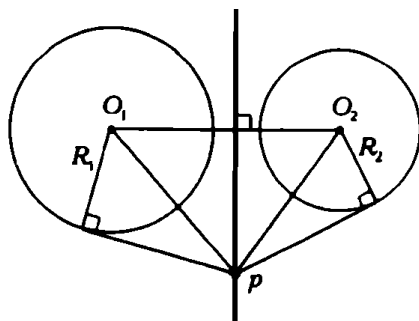


Рис. 5

ных (точнее, их квадратов) с помощью теоремы Пифагора можно записать так (рис. 5): $PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2$ или $I_P = PO_1^2 - PO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$, где I_P — момент инерции системы $1O_1, (-1)O_2$ относительно точки P . Сейчас общая масса равна $1 + (-1) = 0$, поэтому надо пользоваться формулой (4), взяв в ней в качестве Q любую фиксированную точку плоскости, например, O_1 :

$$I_P = I_{O_1} + 2\overrightarrow{PO_1} \cdot (-\overrightarrow{O_1O_2}) = -O_1O_2^2 + 2\overrightarrow{PO_1} \cdot \overrightarrow{O_1O_2},$$

т. е.

$$\overrightarrow{PO_1} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}(R_1^2 - R_2^2 + O_1O_2^2).$$

Легко понять, что это условие задает прямую, перпендикулярную O_1O_2 . (Убедитесь самостоятельно, что из любой точки этой прямой можно провести касательные к окружностям.)

Задачи

4. Пусть m_a и l_a — длины медианы и биссектрисы треугольника ABC , проведенных из вершины A . Докажите, что $m_a^2 = (b^2 + c^2)/2 - a^2/4$, $l_a^2 = bc - b_1c_1$, где a, b, c — длины сторон, b_1, c_1 — длины отрезков, на которые биссектриса делит сторону BC .

5. **Формула Лейбница**. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что для любой точки P , $PM^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)/3 - (a^2 + b^2 + c^2)/9$, где a_1, b_1, c_1 — расстояния от точки P до вершин треугольника, a, b, c — длины его сторон.

* Если окружности не пересекаются, рассматриваемое множество состоит из двух лучей, продолжающих их общую хорду. Обычно радикальную ось определяют другим условием, которое всегда задает «полную» прямую (при $O_1 \neq O_2$) и сводится к тем же уравнениям.

6. Докажите, что множество точек пространства P , для которых величина $m_1 PA_1^2 + \dots + m_n PA_n^2$ принимает заданное значение при заданных точках A_1, \dots, A_n и заданных коэффициентах m_1, \dots, m_n , есть сфера, точка или пустое множество, если $m = m_1 + \dots + m_n \neq 0$, и плоскость, все пространство или пустое множество, если $m = 0$. При каких условиях реализуются перечисленные случаи?

Две замечательные теоремы из геометрии треугольника

Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC , p — полупериметр, S — площадь, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей, O и Z — их центры.

Формула Эйлера. $OZ^2 = R^2 - 2Rr$.

Для доказательства заметим, что Z — это центр масс системы материальных точек aA, bB, cC (см. задачу 1). Найдем моменты инерции этой системы относительно Z (см. (6)):

$$I_Z = \frac{abc^2 + bca^2 + cab^2}{a + b + c} = abc =$$

$$= 2R \sin \angle A \cdot bc = 4RS = 4Rrp,$$

и относительно O :

$$I_O = aR^2 + bR^2 + cR^2 = 2pR^2.$$

По формуле (5) $OZ^2 = (I_O - I_Z)/2p = R^2 - 2Rr$.

Одна из красивейших теорем геометрии треугольника утверждает, что середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, лежат на одной окружности — так называемой «окружности девяти точек». Но еще большее впечатление производит

Теорема Фейрбаха. *Окружность девяти точек касается четырех «замечательных» окружностей — описанной и трех вневписанных.*

Мы докажем эту теорему только для вписанной окружности (остальные рассматриваются аналогично — см. задачу 8), причем нам будет достаточно знать, что окружность девяти точек проходит через середины A_1, B_1 и C_1 сторон треугольника ABC .

Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $1/2$, поэтому радиус его описанной окружности равен $R/2$; ее центр обозначим через F . Условие касания этой окружности с вписанной удобно записать и доказывать в виде

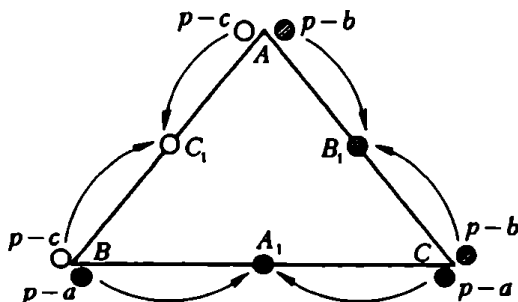


Рис. 6

$$FZ^2 = \left[\frac{R}{2} - r \right]^2.$$

Поместим в вершины ABC треугольника массы a, b, c (их центром масс будет точка Z), разобьем каждую массу на две части: $a = (p - b) + (p - c)$, $b = (p - c) + (p - a)$, $c = (p - a) + (p - b)$ и попарно группируем эти части, как показано на рисунке 6; центр масс при этом останется на месте. Центр масс системы $(p - a)B, (p - a)C$ находится в точке A_1 , системы $(p - b)A, (p - b)C$ — в точке B_1 , а системы $(p - c)A, (p - c)B$ — в точке C_1 , следовательно, точка Z — это центр масс системы $(p - a)A_1, (p - b)B_1, (p - c)C_1$ (массы, полученные после группировки, мы одновременно уменьшили вдвое). Найдем моменты инерции этой системы относительно точек F и Z :

$$I_F = ((p - a) + (p - b) + (p - c)) \left[\frac{R}{2} \right]^2 = \frac{R^2}{4} p,$$

$$I_Z = \frac{1}{p} ((p - a)(p - b) \left[\frac{c}{2} \right]^2 + (p - b)(p - c) \left[\frac{a}{2} \right]^2 + (p - a)(p - c) \left[\frac{b}{2} \right]^2).$$

Задача 7. Докажите, что для любого треугольника справедливо тождество

$$(p - a)(p - b)c^2 + (p - b)(p - c)a^2 + (p - c)(p - a)b^2 = abc p - 4S^2.$$

Пользуясь тождеством этой задачи, завершить доказательство совсем легко: по формуле (5)

$$FZ^2 = \frac{I_F - I_Z}{p} = \frac{R^2}{4} - \frac{abc}{4p} + \frac{S^2}{p^2} =$$

$$= \frac{R^2}{4} - \frac{abc}{4Rp} R + \left[\frac{S}{p} \right]^2 = \frac{R^2}{4} - rR + r^2 = \left[\frac{R}{2} - r \right]^2,$$

что и требовалось.

Задача 8. Докажите утверждение теоремы Фейербаха для вневписанных окружностей. (Указание: центр вневписанной окружности, касающейся (извне) стороны a , служит центром масс системы $(-a)A, bB, cC$. Соберите эти массы в серединах сторон, пользуясь равенствами $a = (p - b) + (p - c)$, $b = p - (p - b)$, $c = p - (p - c)$.)

Расстояние до центра масс и вывод формулы Лагранжа

Чтобы доказать формулы (7) и (6), мы выведем формулу, выражающую расстояние от произвольной точки P до центра масс Z системы материальных точек $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$ через расстояния от этой точки до точек системы: $r_i = PA_i$, попарные расстояния между точками системы: $a_{ij} = A_i A_j$. В силу (1),

$$mPZ = m_1 P\vec{A}_1 + \dots + m_n P\vec{A}_n = \sum_i m_i P\vec{A}_i.$$

Возводя это векторное равенство в скалярный квадрат, получим

$$m^2 PZ^2 = \sum_i m_i P\vec{A}_i \cdot \sum_j m_j P\vec{A}_j = \sum_{i,j} m_i m_j P\vec{A}_i \cdot P\vec{A}_j,$$

где в правой части стоит сумма всех произведений $m_i m_j P\vec{A}_i \cdot P\vec{A}_j$ при $1 \leq i, j \leq n$. Каждое слагаемое этой суммы можно преобразовать, пользуясь равенством

$$A_i A_j^2 = (P\vec{A}_j - P\vec{A}_i)^2 = PA_i^2 + PA_j^2 - 2P\vec{A}_i \cdot P\vec{A}_j,$$

$$m_i m_j P\vec{A}_i \cdot P\vec{A}_j = \frac{1}{2} m_i m_j (r_i^2 + r_j^2 - a_{ij}^2).$$

Складывая эти выражения, получим:

$$m^2 PZ^2 = \left[\sum_i m_i P\vec{A}_i \right]^2 = m \sum_i m_i r_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j a_{ij}^2$$

(мы учли, что сумма слагаемых $m_i m_j r_{ij}^2$ по всем $i, j, 1 \leq i, j \leq n$ равна сумме величин $m_i m_j r_{ji}^2$ и что $m_i m_j a_{ij}^2 = m_j m_i a_{ji}^2$).

Задачи

9. Расстояние между двумя центрами масс.

а) Пусть в точках A_1, \dots, A_n помещены два набора масс — p_1, \dots, p_n и q_1, \dots, q_n , причем $p_1 + \dots + p_n = 1$ и $q_1 + \dots + q_n = 1$, и пусть P и Q — центры масс этих двух систем материальных точек. Докажите, что

$$PQ = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (p_i - q_i)(p_j - q_j) A_i A_j.$$

б) Пусть A и B — центры систем материальных точек $a_1 A_1, \dots, a_n A_n$ и $b_1 B_1, \dots, b_m B_m$. Докажите, что

$$AB^2 = \frac{1}{ab} \sum_{i, j} a_i b_j A_i B_j^2 - \frac{1}{a^2} \sum_{i < k} a_i a_k A_i A_k^2 - \frac{1}{b^2} \sum_{i < l} b_i b_l B_i B_l^2.$$

где $a = a_1 + \dots + a_n$, $b = b_1 + \dots + b_m$, индексы i и k в суммах пробегают значения от 1 до n , a_j и l — от 1 до m . (Указание: а) покажите, что $\overrightarrow{PQ} = \sum_i (q_i - p_i) \overrightarrow{PA}$, воспользуйтесь вторым

равенством в (9), справедливым и при $m = 0$, полагая в нем $m_i = q_i - p_i$; б) сводится к а), если представить точку A как центр масс системы $(a_1/a)A_1, \dots, (a_n/a)A_n, 0B_1, \dots, 0B_m$ и, аналогично, точку B .)

10. **Формула Эйлера.** Пусть M и N — середины отрезков AC и BD , где A, B, C, D — любые 4 точки в пространстве. Докажите, что

$$4MN^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2.$$

Какое свойство параллелограмма вытекает из этой формулы?

Изучая геометрию, вы, наверное, заметили, что некоторые свойства треугольника и тетраэдра похожи, а многие геометрические понятия, связанные с треугольником, имеют пространственные аналоги. Например: сторона треугольника — грань тетраэдра, длина стороны — площадь грани, вписанная окружность — вписанная сфера, описанная окружность — описанная сфера, площадь — объем, биссектриса угла — биссектор двугранного угла и т. п.

Эта аналогия — не только внешняя. Многие теоремы о треугольниках, если заменить в их формулировках планиметрические термины соответствующими стереометрическими и соответствующим образом "подправить" формулировки, превращаются в теоремы о тетраэдрах. Несколько таких теорем мы и рассмотрим.

Теорема 1. *Биссектриса CD внутреннего угла треугольника ABC делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные его сторонам AC и BC .*

Доказательство. Примем сначала за основания треугольников ADC и DCB (рис. 1) отрезки AC и BC соответственно. Точка D равноудалена от сторон угла ACB , поэтому

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}} = \frac{AC}{BC}.$$

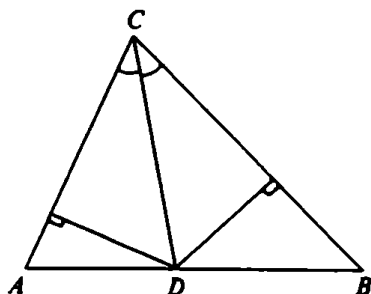


Рис. 1

Теперь примем за основания этих же треугольников отрезки AD и DB . Ясно, что

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}} = \frac{AD}{BD}.$$

Следовательно,

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$

Напомним, что *биссектором* двугранного угла называется полуплоскость, делящая его на два равных по величине двугранных угла. Биссектор двугранного угла является множеством точек, равноудаленных от его граней. Докажем свойство биссектора двугранного угла тетраэдра, аналогичное свойству биссектрисы угла треугольника.

Теорема 2. *Биссектор двугранного угла тетраэдра делит противолежащее ребро в отношении, равном отношению площадей граней, образующих этот двугранный угол.*

Доказательство. Пусть ADM — сечение тетраэдра $ABCD$ биссектором двугранного угла с ребром AD (рис. 2). Объемы тетраэдров $ACMD$ и $ABMD$ обозначим через V_1 и V_2 соответственно.

Так как точка M одинаково удалена от граней ADC и ADB ,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{ADC}}{S_{ADB}}.$$

С другой стороны, легко видеть, что

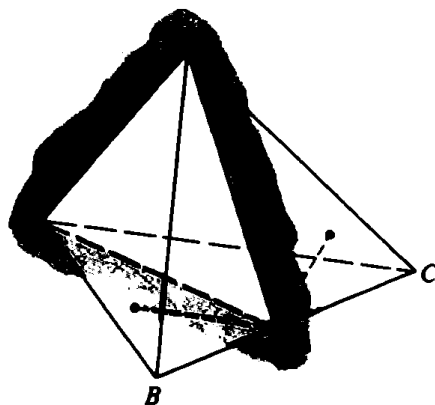


Рис. 2

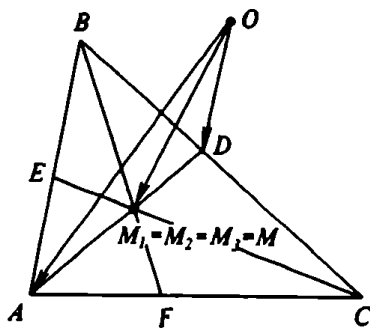


Рис. 3

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{DMC}}{S_{DMB}} = \frac{MC}{MB}.$$

Поэтому $\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}} = \frac{MC}{MB}$, что и требовалось доказать.

Попутно заметим, что $\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}} = \frac{S_{DMC}}{S_{DMB}}$, что еще раз подчеркивает аналогичность теорем 1 и 2.

Для дальнейшего нам потребуется следующее утверждение: если точка M делит отрезок AB в отношении $m : n$, то для произвольной точки O пространства

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{OB} \quad (*)$$

(убедитесь в этом!).

Мы применим (*) к доказательству теоремы о точке пересечения медиан треугольника и аналогичной ей теоремы для тетраэдра.

Теорема 3. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершин.

Доказательство. Пусть M_1 — точка медианы AD треугольника ABC такая, что $AM_1 : M_1D = 2 : 1$, а O — произвольная точка пространства (рис. 3).

В силу (*) имеем $\overrightarrow{OM}_1 = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Поэтому $\overrightarrow{OM}_1 = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Если M_2 и M_3 — точки, делящие медианы CE и BF в отношении 2:1, считая от вершины, то, аналогично,

$$\overrightarrow{OM}_2 = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \quad \overrightarrow{OM}_3 = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Таким образом, $\overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OM}_3$, и, следовательно, точки M_1 , M_2 и M_3 совпадают. Теорема доказана.

Отметим, что попутно получено известное соотношение: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, где M — центроид (точка пересечения медиан) треугольника, а O — произвольная точка пространства.

Назовем *медианой тетраэдра* отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противоположащей грани. Оказывается, для медиан тетраэдра справедлива теорема, аналогичная теореме 3.

Теорема 4. *Четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершин.*

Доказательство. Пусть M_1 — точка медианы CC_1 тетраэдра $ABCD$ такая, что $CM_1 : M_1C_1 = 3 : 1$ (рис. 4). Пусть O — произвольная точка пространства. По формуле (*) $\overrightarrow{OM}_1 = \frac{1}{4} \overrightarrow{OC} + \frac{3}{4} \overrightarrow{OC}_1$. Кроме того, $\overrightarrow{OC}_1 = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$, так как C_1 — центроид треугольника ABD . Поэтому

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}_1 &= \frac{1}{4} \overrightarrow{OC} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}). \end{aligned}$$

Точно такие же выражения получим для точек M_2 , M_3 и

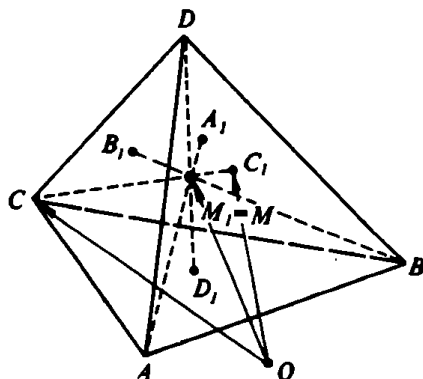


Рис. 4

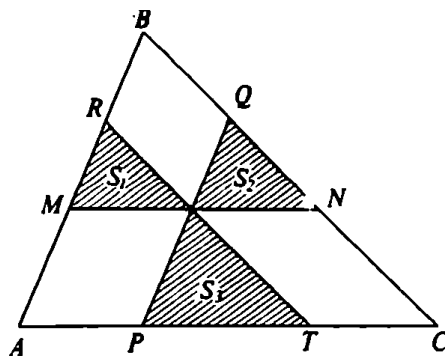


Рис. 5

M_4 , делящих медианы тетраэдра AA_1 , BB_1 и DD_1 в отношении $3:1$ соответственно. Следовательно, $\overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OM}_3 = \overrightarrow{OM}_4 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, и поэтому точки M_1 , M_2 , M_3 и M_4 совпадают.

Точка M пересечения медиан тетраэдра называется его *центроидом*. Отметим, что для произвольной точки O пространства справедливо равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

В заключение рассмотрим одну интересную теорему планиметрии и попытаемся найти аналогичную ей теорему стереометрии.

Теорема 5. *Через произвольную точку O , взятую внутри треугольника ABC , проведены прямые, параллельные его сторонам. Если S_1 , S_2 , S_3 — площади образовавшихся при этом треугольников (рис. 5), а S — площадь данного треугольника, то*

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}.$$

Доказательство. Образовавшиеся треугольники подобны треугольнику ABC , поэтому

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{MR}{AB}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{OQ}{AB}, \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{OP}{AB}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{MR + OQ + OP}{AB} = \frac{MR + BR + MA}{AB} = 1,$$

откуда

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}.$$

Сформулируем теперь аналогичную теорему в пространстве.

Теорема 6. *Через произвольную точку, взятую внутри тетраэдра, проведены четыре плоскости, параллельные граням тетраэдра. Если V_1, V_2, V_3, V_4 – объемы образовавшихся при этом тетраэдров, а V – объем данного тетраэдра, то*

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}.$$

Для доказательства этой теоремы, которое мы предоставим читателю, следует воспользоваться тем, что тетраэдры, о которых идет речь в условии, подобны исходному, а также тем, что объемы подобных многогранников относятся как кубы длин их ребер.

Предлагаемые ниже задачи объединены в пары. В каждой паре пункт а) – некоторая теорема планиметрии, а пункт б) – ее пространственный аналог.

Упражнения

1. а) Докажите, что площадь треугольника, описанного около окружности, вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2} Pr$, где r – радиус этой окружности, P – периметр треугольника.

б) Докажите, что объем тетраэдра, описанного около сферы, вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} Sr$, где r – радиус этой сферы, S – полная поверхность тетраэдра.

2. а) В треугольник вписана окружность с радиусом r . Докажите, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$, где h_1, h_2, h_3 – высоты треугольника.

б) В тетраэдр вписана сфера с радиусом r . Докажите, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$, где h_1, h_2, h_3, h_4 – высоты тетраэдра.

3. а) Через центр правильного треугольника проведена прямая, параллельная основанию. На этой прямой внутри треугольника взята произвольная точка O . Докажите, что расстояние от точки O до основания треугольника равно среднему арифметическому расстояний от точки O до боковых сторон треугольника.

б) Через центр правильного тетраэдра проведена плоскость, параллельная основанию. На этой плоскости внутри тетраэдра взята произвольная точка O . Докажите, что расстояние от точки O до основания тетраэдра есть среднее арифметическое расстояний от точки O до боковых граней тетраэдра.

ЧТО ТАКОЕ π ?

А. Зоонкин

Длина отрезка

Длиной отрезка называется расстояние между его концами.

На практике длины отрезков измеряют с помощью измерительных приборов — линейки, рулетки и т. п. Теоретический анализ этого процесса приводит к математической конструкции, называемой *процессом измерения*, и вполне заслуживает отдельной статьи.

Коротко говоря, процесс измерения состоит в следующем:

- 1) выбирается произвольный отрезок — *единица длины*;
- 2) единица длины откладывается в измеряемом отрезке столько раз, сколько можно;
- 3) если при этом от измеряемого отрезка остается остаток, то единица длины делится на равные части и полученная часть единицы откладывается в остатке;
- 4) и так далее.

Самое интересное здесь скрыто в четвертом пункте. Оказывается, процесс измерения может кончиться за конечное число шагов (в этом случае измеряемый отрезок и единица длины называются *соизмеримыми*), а может и *продолжаться бесконечно*.

Таким образом, даже при измерении длины отрезка может понадобиться *предельный переход*. Вполне естественно, что он будет необходим нам и при определении *длины окружности*. При этом будем считать, что мы уже знаем, что такое длина отрезка и, тем самым, *периметр многоугольника*.

Читатель может спросить: а нельзя ли измерить длину окружности следующим простым способом — обмотать ее ниткой, затем нитку развернуть и приложить к линейке? К сожалению, для превращения этого практического способа измерения в строгую математическую конструкцию требуются довольно изысканные математические средства, выходящие за рамки школьной программы.

Плохие определения длины окружности

Теорема может быть верной или неверной — определение ни верным, ни неверным быть не может. Определение может быть

противоречивым (если не существует объектов, удовлетворяющих ему), *некорректным* (если оно определяет не то, что мы хотели) и *неудобным*.

Мы дадим сейчас несколько определений длины окружности. Все определения будут строиться по одной и той же схеме: тем или иным способом будет выбираться последовательность (P_n) вписанных в окружность многоугольников и длиной окружности будет называться $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, где P_n — периметр многоугольника Π_n . Друг от друга определения будут отличаться разным выбором последовательностей (Π_n) .

Дадим сначала несколько плохих определений.

«Определение» 1. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, где (Π_n) — произвольная последовательность вписанных многоугольников.

Это определение никуда не годится. Например, если при всех n многоугольник Π_n — это один и тот же вписанный в окружность квадрат, то (P_n) — постоянная последовательность, и в качестве длины окружности у нас получится периметр вписанного квадрата. Если же в последовательности (Π_n) стоят по очереди квадраты и правильные треугольники, то последовательность (P_n) предела не имеет (докажите!).

Обозначим через $\varphi(n)$ число сторон многоугольника Π_n , через $\psi(n)$ — длину его наибольшей стороны.

«Определение» 2. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, где (Π_n) — такая последовательность, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = +\infty^*$.

Оказывается, и это определение некорректно. На рисунке 1 изображена последовательность (Π_n) , удовлетворяющая «определению» 2 и такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ не совпадает с тем, что мы хотели бы считать длиной окружности. Нетрудно также построить пример последовательности (Π_n) , удовлетворяющей «определению» 2, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ не существует (постройте!).

«Определение» 3. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, где (Π_n) — такая последовательность, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = 0$.

* Т. е. $\varphi(n)$ становится сколь угодно большим.

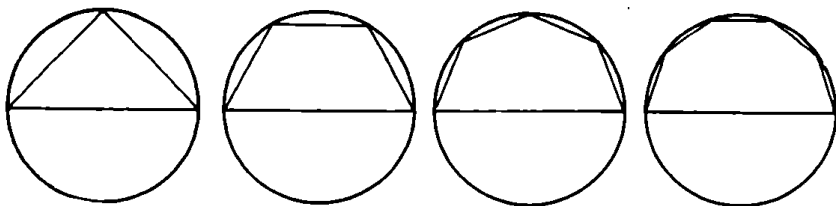


Рис. 1

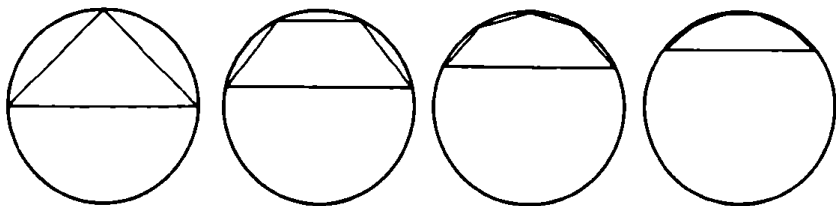


Рис. 2

К сожалению, и этот вариант не годится. На рисунке 2 изображена последовательность (Π_n) , удовлетворяющая «определению» 3 и такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$. Как и в «определениях» 1, 2, легко построить такую (Π_n) , что $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ не существует.

Хорошие определения длины окружности

Определение 4. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, где (Π_n) — такая последовательность, что при всех n центр окружности лежит внутри Π_n и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = 0$.

Можно доказать, что для любой (Π_n) , удовлетворяющей определению 4, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ существует, причем он не зависит от выбора исходной последовательности (Π_n) . Однако доказать это очень трудно. Поэтому определение 4 неудобно. Кроме того, оно некрасиво: уж очень много в нем разнородных требований.

Определение 5. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, где (Π_n) — правильный n -угольник.

В отличие от определений 1 — 3, в данном случае предел действительно существует. Докажем это.

Теорема. Последовательность (P_n) возрастает и ограничена.

Доказательство мы разобьем на ряд шагов, которые пред-

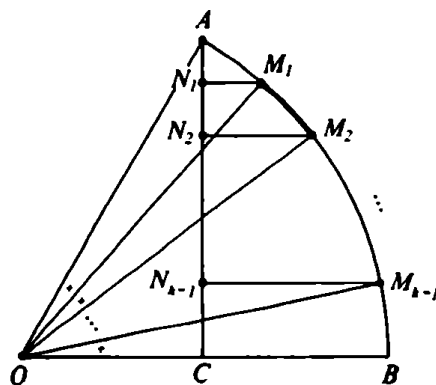


Рис. 3

ставим в виде задач. При их решении важно обойтись без тригонометрии, так как определение тригонометрических функций опирается на понятие длины окружности.

Задачи

1. Прямоугольные треугольники ABC и ADC имеют общий катет AC и $\angle BAC < \angle DAC$. Докажите, что $AB < AD$.

2. У прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ гипотенузы AB и A_1B_1 равны и $\angle BAC < \angle B_1A_1C_1$. Докажите, что $A_1C_1 < AC$.

3. Острый центральный угол AOB разделен радиусами $OM_1, OM_2, \dots, OM_{k-1}$ на k равных частей (рис. 3). Точка C — проекция точки A на OB , точка N_i — проекция точки M_i на AC ($i = 1, 2, \dots, k-1$). Докажите, что $AN_1 < N_1N_2 < \dots < N_{k-1}C$.

4. Докажите, что $P_{n+1} > P_n$.

5. Докажите, что если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внутреннего меньше, чем периметр внешнего. Покажите, что без условия выпуклости это утверждение неверно.

Итак, последовательность (P_n) возрастает (задача 4) и ограничена (для любого n периметр P_n меньше, чем периметр описанного квадрата — задача 5). По теореме Вейерштрасса она имеет предел. Значит, определение 5 корректно: любая окружность имеет (единственную) длину.

Число π

Обозначим длину окружности через L , ее диаметр — через d , радиус — через r , длину стороны правильного вписанного n -угольника — через a_n .

Теорема. Отношение $\frac{L}{d}$ одинаково для всех окружностей.

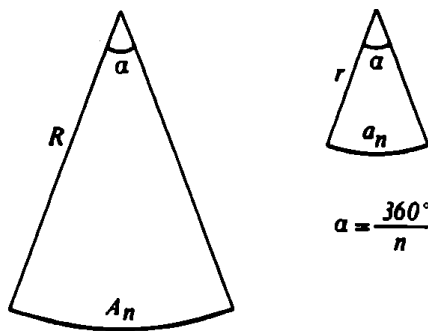


Рис. 4

Поскольку

$$\frac{L}{d} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} P_n}{d} = \frac{1}{d} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{2r} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n}{r} n \right],$$

достаточно доказать, что одинаково для всех окружностей отношение $\frac{a_n}{r}$, а это вытекает из подобия треугольников, изображенных на рисунке 4.

Вот это самое отношение длины окружности к диаметру и принято обозначать греческой буквой π .

Буква π — первая буква греческого слова *περιφέρεια* («окружность»). Впервые это обозначение использовал в 1706 году английский математик У. Джонс, но общепринятым оно стало после того, как его (начиная с 1736 года) стал систематически употреблять Л. Эйлер.

Другие хорошие определения

Разумеется, определение 5 не является единственно возможным. В определении 4 был указан эквивалентный вариант. Приведем еще несколько.

Определение 6. Пусть Δ_n — правильный описанный n -угольник, Q_n — его периметр; длиной окружности называется $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n$.

Последовательность (Q_n) является, конечно, убывающей.

Определение 7. Длина окружности — число $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{2^n}$, т. е. предел последовательности периметров правильных вписанных 2^n -угольников ($\frac{P}{2^2}$ — вписанный квадрат, $\frac{P}{2^3}$ — правильный вписанный восьмиугольник и т. д.).

В данном случае монотонность последовательности периметров очевидна; однако само определение довольно искусственно — непонятно, откуда взялось 2^n , получится ли тот же предел для P_{3^n} .

Особняком стоит

Определение 8. *Длина окружности — это число, которое больше периметра любого вписанного многоугольника и меньше периметра любого описанного многоугольника.*

Это очень хорошее определение. К сожалению, доказательство существования такого числа опирается на теорему, отсутствующую в школьном курсе математики. Однако в предположении, что оно существует, можно доказать его единственность.

Определение — только первый шаг. Дальше надо заняться способами вычисления числа π , его свойствами — но об этом нужен отдельный разговор.

О числе π можно прочесть много интересного в книге Ф. Кымпан «История числа π » (М., Наука, 1971).

ДВУГРАННЫЕ И ТРЕХГРАННЫЕ УГЛЫ

Б. Ивлев

Двугранные углы. Двугранным углом называют объединение двух полуплоскостей, имеющих общую границу, и одной из ограниченных ими пространственных областей (рис. 1). Подчеркнем: не всякий двугранный угол есть пересечение двух полупространств (см. рис. 1, б).

Величиной двугранного угла называют величину плоского угла, получающегося в сечении этого двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру. Величина двугранного угла на рисунке 1, а меньше π , а двугранного угла на рисунке 1, б — больше π .

Двугранные углы — пространственные аналоги углов на плоскости: многие их свойства аналогичны свойствам плоских углов. Например, биссектор выпуклого двугранного угла (так называют полуплоскость, делящую двугранный угол на два равных двугранных угла), можно определить как множество точек двугранного угла, равноудаленных от его граней. Так же, как и на плоскости, определяются вертикальный и смежный углы, при этом их величины равны соответственно φ и $\pi - \varphi$, где φ — величина исходного двугранного угла.

Сейчас мы разберем решения двух задач, в некотором смысле обратных друг другу.

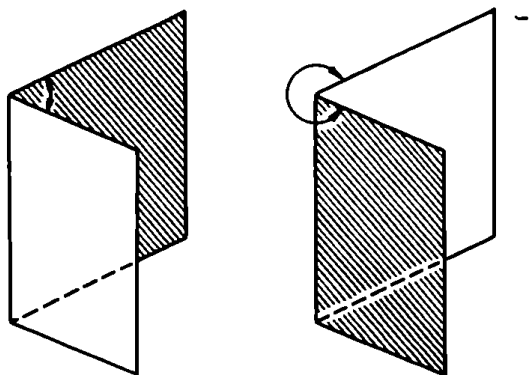


Рис. 1

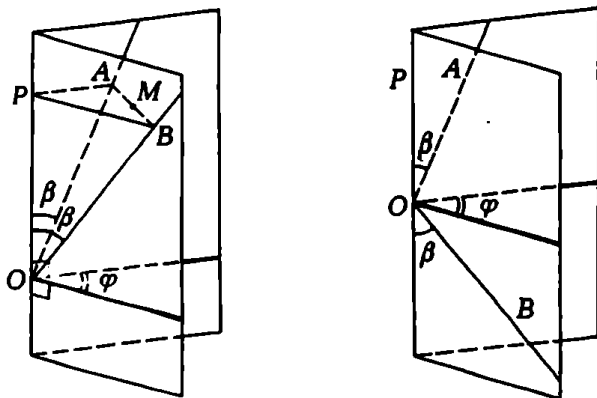


Рис. 2

Задача 1. Двугранный угол величиной φ , $0 < \varphi < \pi$, пересечен плоскостью. В каких пределах может лежать величина α угла, получающегося в сечении?

Задача 2. В каких пределах может лежать величина φ угла, являющегося ортогональной проекцией угла величиной α , $0 < \alpha < \pi$?

Ответ к задаче 1: $0 < \alpha < \pi$. Поскольку величина двугранного угла меньше π , он лежит по одну сторону от плоскости любой из своих граней. Поэтому и угол в сечении лежит по одну сторону от прямой, содержащей любую из его сторон. Следовательно, $\alpha < \pi$. Остается показать, что для любого α из промежутка $(0; \pi)$ существует плоскость, пересекающая двугранный угол по углу величиной α . Для этого проще всего указать два луча с общей вершиной на ребре двугранного угла, лежащие в разных его гранях, такие, что угол между ними равен α (а затем через эти два луча провести секущую плоскость).

Выберем на ребре двугранного угла луч OP и проведем в его гранях лучи OA и OB под одинаковым углом β к OP (рис. 2, а). При изменении β лучи OA и OB будут поворачиваться, и ясно, что когда β пробегает все значения от 0 до $\pi/2$, угол $AOB = \alpha$ будет меняться от 0 до φ . Если же луч OB проводить под углом $\pi - \beta$ к OP (рис. 2, б), угол α будет меняться от π до φ (при $0 < \beta < \pi/2$).

Строго обосновать это рассуждение позволяет несложный расчет. Пусть плоскость, перпендикулярная к ребру двугранного угла и проходящая через точку P , пересекает лучи в точках A и B , M — середина отрезка AB (мы рассматриваем первый случай — рис. 2, а). Тогда

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{MA}{OA} = \frac{PA \sin \frac{\varphi}{2}}{OA} = \sin \beta \cdot \sin \frac{\varphi}{2},$$

поэтому $\sin \frac{\alpha}{2}$ принимает при изменении β от 0 до $\pi/2$ все значения в промежутке $(0; \sin \frac{\alpha}{2}]$, а сам угол α — в промежутке $(0; \varphi]$ (поскольку угол $\alpha/2$ — острый).

Вычисления для второго случая мы оставим читателю, а здесь покажем, как можно обойтись без них. Очевидно, что в сечении двух смежных двугранных углов любой плоскостью (пересекающей их общее ребро) образуются смежные плоские углы (рис. 3). Но угол в сечении двугранного угла, смежного к данному, как показано выше, может иметь любую величину от 0 до $\pi - \varphi$ ($\pi - \varphi$ — величина этого смежного угла). Поэтому в соответствующих сечениях исходного двугранного угла будут получаться углы величиной от π до φ , что как раз и требовалось.

Перейдем к задаче 2. Пусть угол A_1OB_1 величиной φ является ортогональной проекцией угла AOB величиной α . Угол A_1OB_1 определяет двугранный угол величиной φ , ребро которого — это перпендикуляр к плоскости A_1OB , проходящий через точку O , а грани содержат лучи OA_1 и OB . Очевидно, угол AOB является сечением этого двугранного угла. Таким образом, мы снова оказались в ситуации задачи 1, только теперь задана величина угла в сечении α , а не двугранного угла φ . Но из задачи 1 известно, что при любых заданных значениях α и φ , $0 < \alpha$, $\varphi < \pi$, можно так пересечь двугранный угол величиной φ , чтобы в сечении получился угол величиной α . Следовательно, в задаче 2 при проектировании можно получить угол любой величины φ , $0 < \varphi < \pi$, независимо от α . Учитывая, что $\varphi < \pi$ (так как угол AOB меньше развернутого), находим ответ: $0 < \varphi < \pi$.

Трехгранные углы. Пусть дан треугольник ABC и точка S , не лежащая в плоскости этого треугольника. Трехгранным углом $SABC$ (выпуклым) называют объединение всех лучей с вершиной S , пересекающих треугольник ABC . (Иногда определяют и невыпуклый трехгранный угол $SABC$ — объединение всех лучей с вершиной S , не пересекающих внутренность треугольника ABC — такие трехгранные углы мы рассматривать не будем.)

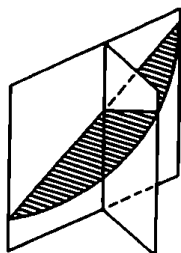


Рис. 3

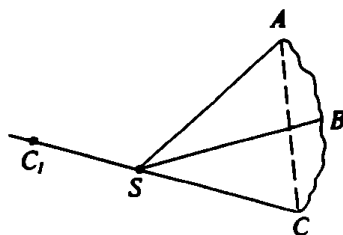


Рис. 4

Для краткости мы будем использовать следующие обозначения для трехгранного угла $SABC$: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — величины двугранных углов с ребрами SA , SB , SC соответственно, α , β , γ — величины противоположащих им плоских углов.

Трехгранные углы — один из возможных пространственных аналогов треугольников (другой аналог — тетраэдры). Поэтому многие теоремы геометрии трехгранных углов похожи на теоремы геометрии треугольников (при этом плоским углам соответствуют стороны треугольников, а двугранным углам — углы треугольников). Например, известная теорема «каждый плоский угол меньше суммы двух других» — аналог неравенства треугольника. Применяя эту теорему к трехгранному углу $SABC$ (рис. 4), получаем другое полезное свойство трехгранных углов: «сумма плоских углов меньше 360° ».

Аналогом теоремы «высоты треугольника пересекаются в одной точке» служит утверждение следующей задачи.

Задача 3. Докажите, что три плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла перпендикулярно противоположным граням («высоты»), имеют общую прямую.

(Имеется в виду, что указанные плоскости определены однозначно, т. е. хотя бы два плоских угла, для определенности ASB и ASC , не прямые.)

Доказательство мы сведем к применению аналогичной планиметрической теоремы.

Проведем через точку A , взятую на ребре SA , плоскость, перпендикулярную этому ребру (рис. 5). Пусть B и C — точки пересечения этой плоскости с прямыми SB и SC соответственно, AA_1 , BB_1 , CC_1 — линии пересечения плоскостей из условия задачи с плоскостью ABC .

Плоскость SAA_1 перпендикулярна плоскостям SBC (по условию) и ABC (она проходит через перпендикуляр SA к плоско-

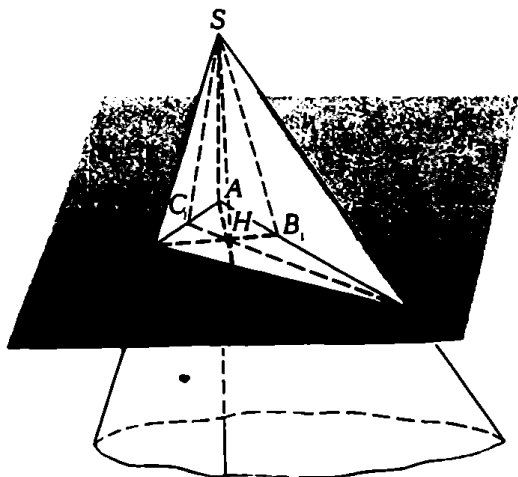


Рис. 5

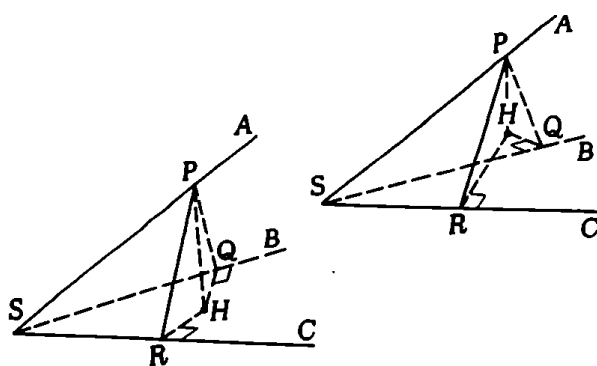


Рис. 6

сти ABC), поэтому она перпендикулярна к их линии пересечения — прямой BC . Отсюда следует, что $AA_1 \perp BC$, т. е. что AA_1 — высота треугольника ABC .

Плоскость ASC перпендикулярна плоскостям ABC и SBB_1 , поэтому она перпендикулярна прямой BB_1 , следовательно, $BB_1 \perp AC$; аналогично, $CC_1 \perp AB$, значит, BB_1 и CC_1 — тоже высоты треугольника ABC .

Высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке — точке H , поэтому три плоскости, о которых идет речь в задаче, пересекаются по прямой — прямой SH .

Теоремы синусов и косинусов. Для (выпуклого) трехгранного угла верны следующие соотношения;

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \angle A} = \frac{\sin \beta}{\sin \angle B} = \frac{\sin \gamma}{\sin \angle C} \quad (1)$$

(теорема синусов);

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \angle A \quad (2)$$

(первая теорема косинусов);

$$\cos \angle A = -\cos \angle B \cos \angle C + \sin \angle B \sin \angle C \cos \alpha \quad (3)$$

(вторая теорема косинусов).

Доказательство теоремы синусов. Возьмем на ребре SA точку P , $SP=1$; пусть Q , R и H — ее проекции на прямые SB , SC и плоскость SBC (рис. 6). В прямоугольном треугольнике PQH угол при вершине Q равен $\angle B$ (если $\angle B \leq \pi/2$ — рис. 6, а) или $\pi - \angle B$ (при $\angle B > \pi/2$ — рис. 6, б); в любом случае

$$PH = PQ \sin \angle B = SP \sin \gamma \cdot \sin \angle B = \sin \gamma \cdot \sin \angle B.$$

Из прямоугольных треугольников PRH и SPR аналогично получается, что $PH = \sin \beta \cdot \sin \angle C$. Приравнявая эти два выражения, находим, что $\sin \beta / \sin \angle B = \sin \gamma / \sin \angle C$. Точно так же доказывается второе равенство теоремы.

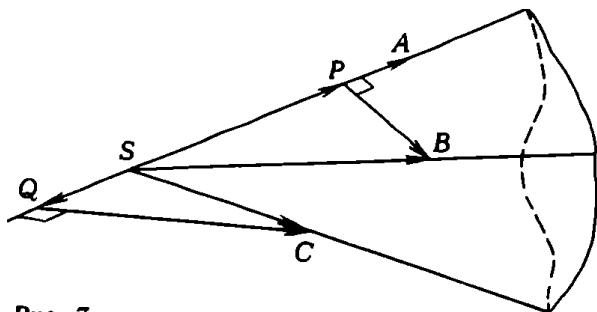


Рис. 7

Доказательство первой теоремы косинусов. Пусть векторы $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ имеют длину 1, P и Q — проекции точек B и C на прямую SA (рис. 7). Тогда $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \cos \gamma$, $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = \cos \beta$, $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \cos \alpha$, угол между векторами \overrightarrow{PB} и \overrightarrow{QC} равен $\angle A$, $\overrightarrow{SP} = \cos \alpha \cdot \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SQ} = \cos \beta \cdot \overrightarrow{SA}$ и (вне зависимости от того, острые, прямые или тупые углы β и γ) $\overrightarrow{QC} = \sin \beta$, $\overrightarrow{PB} = \sin \gamma$. Далее, $\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SQ}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SP}$ и в силу свойств скалярного произведения $\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SP} - \overrightarrow{SQ} \cdot \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SQ} \cdot \overrightarrow{SP}$, откуда

$$\sin \beta \sin \gamma \cos \angle A = \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma,$$

т. е.

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \angle A.$$

Теорема доказана.

Если угол A — прямой, то $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma$. Это утверждение иногда называют *теоремой Пифагора для трехгранных углов*.

Для доказательства второй теоремы косинусов удобно воспользоваться понятием полярного (или дополнительного) трехгранного угла.

Полярный угол. Пусть дан трехгранный угол $SABC$. Проведем через его вершину S перпендикуляр к плоскости SBC и выберем на нем (из двух возможных) луч SA_1 так, чтобы угол ASA_1 был тупым. Иными словами, точки A и A_1 должны лежать по разные стороны от плоскости SBC . (Объясните, почему угол ASA_1 не может быть прямым.) Аналогично выбирают лучи SB_1 и SC_1 : $SB_1 \perp SAC$, $SC_1 \perp SAB$, углы BSB_1 и

CS_1 — тупые. Трехгранный угол $SA_1B_1C_1$ и называют *полярным* к углу $SABC$.

Многие применения полярных углов основаны на следующих двух интересных свойствах:

1) *угол, полярный к полярному, совпадает с исходным трехгранным углом;*

2) *для взаимно полярных трехгранных углов $SABC$ и $SA_1B_1C_1$*

$$\alpha_1 = \pi - \angle A, \beta_1 = \pi - \angle B, \gamma_1 = \pi - \angle C,$$

$$\angle A_1 = \pi - \alpha, \angle B_1 = \pi - \beta, \angle C_1 = \pi - \gamma.$$

Докажите эти свойства самостоятельно.

Доказательство второй теоремы косинусов. Запишем первую теорему косинусов для угла $SA_1B_1C_1$, полярного к данному углу $SABC$: $\cos \alpha_1 = \cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \sin \beta_1 \sin \gamma_1 \cos \angle A$, и воспользуемся свойством (2). Получим

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \angle A) &= \cos(\pi - \angle B) \cos(\pi - \angle C) + \\ &+ \sin(\pi - \angle B) \sin(\pi - \angle C) \cos(\pi - \alpha), \end{aligned}$$

откуда немедленно вытекает (3).

Упражнения

1. Докажите, что биссектор выпуклого двугранного угла есть множество точек этого угла, равноудаленных от его граней.

2. Дан двугранный угол и прямая l , пересекающая его ребро и проходящая внутри него.

а) Пусть она не перпендикулярна ребру двугранного угла. Докажите, что через прямую l можно провести плоскость так, чтобы она была биссектрисой получившегося в сечении угла, и что такая плоскость единственна.

б) В каких случаях можно провести такую плоскость, если данная прямая перпендикулярна ребру?

3. Докажите, что три следующие плоскости имеют общую прямую:

а) биссекторные плоскости двугранных углов трехгранного угла («биссектрисы»);

б) плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и биссектрисы противоположащих плоских углов («медианы»);

в) плоскости, проходящие перпендикулярно граням трехгранного угла через их биссектрисы («серединные перпендикуляры»).

4. В сечении любого ли трехгранного угла плоскостью можно получить правильный треугольник?

5. В каких пределах может лежать сумма двугранных углов трехгранного угла?

6. а) Докажите, что если все двугранные углы трехгранного угла острые, то и все плоские углы — острые.

б) Верно ли обратное утверждение?

7. В трехгранном угле сумма двух двугранных углов равна π . Докажите, что сумма противоположащих им плоских углов также равна π .

РАВНОГРАННЫЕ И КАРКАСНЫЕ ТЕТРАЭДРЫ

В. Матизен

Среди плоских *четырёхугольников* принято выделять классы, обладающие теми или иными интересными свойствами: параллелограммы, трапеции, вписанные, описанные и другие. Хорошо известны необходимые и достаточные условия принадлежности четырёхугольника к данному классу. Например, четырёхугольник является прямоугольником тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: диагонали конгруэнтны и делятся пополам в точке пересечения. Это условие можно взять за определение прямоугольника.

Точно так же обстоит дело с *тетраэдром* (так сказать — пространственным четырёхугольником). Среди тетраэдров тоже можно выделять классы (например, всем известные *правильные тетраэдры* и *правильные треугольные пирамиды*) и находить необходимые и достаточные условия для принадлежности тетраэдра к данному классу. Именно этим мы здесь займемся, для двух часто встречающихся классов тетраэдров: *равногранных* (с четырьмя равными гранями) и *каркасных* (со сферой, касающейся всех шести ребер). В отличие от плоского случая, здесь окажется очень большое количество существенно различных условий — порой не похожих друг на друга.

Элементы произвольного тетраэдра

У любого тетраэдра 4 вершины, 6 ребер, 4 грани, 4 трехгранных угла, 6 двугранных углов, 12 плоских углов. Если все 6 ребер равны, то равными будут и грани, и трехгранные углы, и плоские; в этом случае тетраэдр — *правильный*. Из равенства всех 4 граней, однако, еще не следует правильность тетраэдра: в этом мы вскоре убедимся при нашем рассмотрении *равногранных тетраэдров*.

У произвольного тетраэдра имеется *центр тяжести*: это точка, в которой пересекаются 4 прямые, соединяющие вершины с центрами тяжести противоположных граней. В этой же точке пересекаются все 3 средние линии тетраэдра, т. е. линии, соединяющие середины противоположных ребер.

Есть у всякого тетраэдра и *центр описанной сферы*, т. е. сферы, проходящей через все 4 вершины. Этот центр является

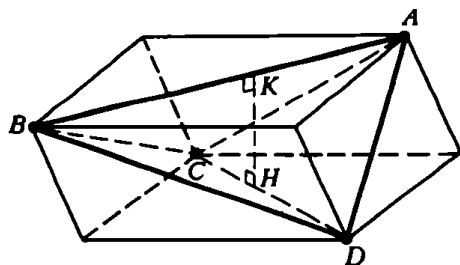


Рис. 1

точкой пересечения 4-х перпендикуляров к граням, восстановленных из центров их описанных окружностей. В этой же точке пересекаются 6 плоскостей, проходящих через середины ребер перпендикулярно к ним.

А вот что назвать *описанной* в тетраэдр сферой – сферу, касающуюся всех ребер, или сферу, касающуюся всей граней? Оказывается, не всякий тетраэдр имеет вписанную сферу в первом смысле (мы в этом убедимся при нашем рассмотрении каркасных тетраэдров), поэтому *описанной сферой* называют сферу, касающуюся всех 4-х граней. Она всегда существует, притом *центр описанной сферы* – точка пересечения биссекторных плоскостей всех 6-ти двугранных углов тетраэдра.

Читатель, уловивший аналогию между тетраэдром и треугольником, наверное, теперь ожидает следующую фразу: «Все высоты (перпендикуляры, опущенные из вершины на противоположную грань) тетраэдра пересекаются в одной точке, называемой его ортоцентром». Но, увы, это утверждение неверно для произвольного тетраэдра, а верно лишь для класса тетраэдров, называемых *ортоцентрическими*. Этого класса мы касаться не будем.

Хорошо представить себе тетраэдр в пространстве помогает *описанный параллелепипед* (рис. 1), который определяется тем, что скрещивающиеся ребра тетраэдра являются диагоналями его противоположных граней. На этой фигуре легко «увидеть» еще один важный элемент тетраэдра: *общие перпендикуляры скрещивающихся ребер* – они образуют высоты параллелепипеда (например, отрезок *КН* на рисунке 1).

Равногранные тетраэдры

Как уже говорилось, равногранным называется тетраэдр, все грани которого равны. Чтобы представить себе равногранный тетраэдр, отличный от правильного, возьмем произвольный остроугольный треугольник из бумаги и будем сгибать его по средним линиям. Тогда три вершины сойдутся в одну точку, а половинки сторон сомкнутся, образуя боковые ребра тетраэдра (рис. 2).

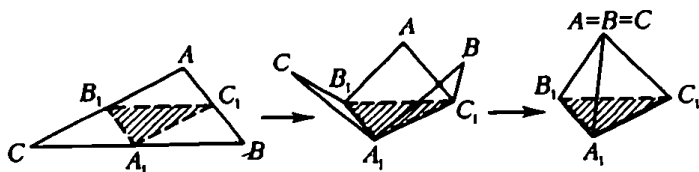


Рис. 2

Перечислим теперь свойства тетраэдра, каждое из которых является необходимым и достаточным условием равногранности, начиная с определения.

- (0) Грани равны.
- (1) Скрещивающиеся ребра попарно равны.
- (2) Трехгранные углы равны.
- (3) Противлежащие двугранные углы равны.
- (4) Два плоских угла, опирающиеся на одно ребро, равны.
- (5) Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180° .
- (6) Развертка тетраэдра – треугольник или параллелограмм (рис. 3).
- (7) Описанный параллелепипед – прямоугольный.
- (8) Тетраэдр имеет три оси симметрии.
- (9) Общие перпендикуляры скрещивающихся ребер попарно перпендикулярны.
- (10) Средние линии попарно перпендикулярны.
- (11) Периметры граней равны.
- (12) Площади граней равны.
- (13) Высоты (тетраэдра) равны.
- (14) Отрезки, соединяющие вершины с центром тяжести противоположных граней, равны.
- (15) Радиусы описанных около граней окружностей равны.
- (16) Центр тяжести (тетраэдра) совпадает с центром описанной сферы.
- (17) Центр тяжести совпадает с центром вписанной сферы.
- (18) Центр описанной сферы совпадает с центром вписанной.

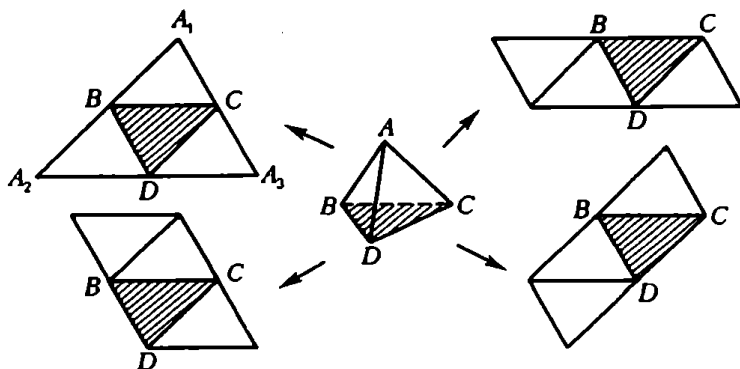


Рис. 3

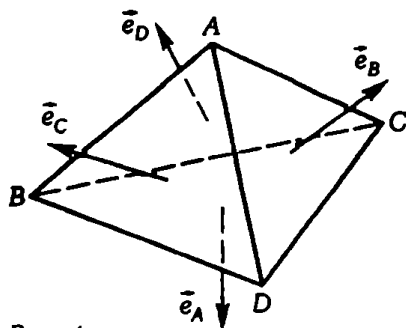


Рис. 4

(19) Вписанная сфера касается граней в центрах описанных около них окружностей.

(20) Сумма внешних единичных нормалей (единичных векторов, перпендикулярных к граням, — см. рис. 4) равна нулю.

(21) Сумма косинусов всех двугранных углов равна 2.

При большом количестве утверждений, равносильность которых нужно доказать, важно найти наиболее экономный порядок рассуждений. Мы наметим его, но лишь часть этапов проведем подробно.

Проще всего устанавливается, что

$$(0) \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4).$$

Для иллюстрации докажем $(1) \Leftrightarrow (0)$. Пусть $AB = DC$, $AD = BC$, $AC = BD$. Тогда любые две грани тетраэдра $ABCD$ равны как треугольники с тремя равными сторонами: одна сторона общая, две другие равны по условию. Например, для граней ADB и ADC ребро AD общее, а ребра AB и DC , AC и BD равны по условию. При остальных доказательствах следует помнить, что трехгранный угол однозначно определяется как своими тремя двугранными углами, так своими тремя плоскими углами.

Рассуждать дальше можно по схеме

$$(4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (1)$$

(откуда уже следует равносильность первых шести условий (1) — (6)). Докажем, например, $(5) \Rightarrow (6)$. Разрежем тетраэдр $ABCD$ по ребрам AB , AC , AD и рассмотрим развертку $A_1BA_2DA_3C$ (см. рис. 3). Тогда в точках B , C и D приложены по три угла, сумма которых 180° , поэтому углы A_1BA_2 , A_2DA_3 , A_3CA_1 развернутые; значит, $A_1A_2A_3$ — треугольник, содержащий точки B , C , D и являющийся разверткой тетраэдра $ABCD$. Для остальных разверток рассуждение аналогично.

Наш следующий шаг — доказательство равносильности

$$(1) \Leftrightarrow (7).$$

В самом деле, поскольку скрещивающиеся ребра тетраэдра — диагонали граней описанного параллелепипеда (см.

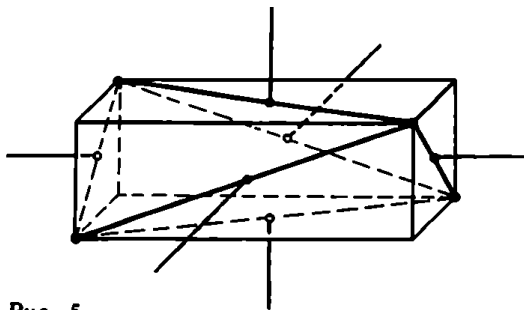


Рис. 5

рис. 1), из попарного равенства ребер следует, что грани описанного параллелепипеда — прямоугольники, и наоборот.

Теперь мы предлагаем рассуждать по схеме

$$(7) \Rightarrow (8) \Rightarrow (9) \Rightarrow (10) \Rightarrow (7).$$

Остановимся лишь на $(7) \Rightarrow (8)$. Взглянув на рисунок 5, вы легко установите, что осями симметрии являются прямые, соединяющие центры симметрии противоположных граней описанного (прямоугольного) параллелепипеда, или, что здесь то же самое, общие перпендикуляры скрещивающихся граней.

Далее, очевидно.

$$(0) \Rightarrow (11), (12), (13), (14), (15).$$

Мы докажем, что $(11) \Rightarrow (1)$, $(12) \Rightarrow (3)$, $(13) \Rightarrow (12)$, $(14) \Rightarrow (1)$, $(15) \Rightarrow (4)$; тем самым будет установлена равносильность первых 15 свойств.

Чтобы установить

$$(11) \Rightarrow (1),$$

запишем условие (11) в виде

$$a_2 + b_2 + c_2 = a_2 + b_1 + c_1 = b_2 + a_1 + c_1 = c_2 + a_1 + b_1, \quad (*)$$

где a_1, b_1, c_1 — длины ребер тетраэдра, исходящих из одной вершины, a_2, b_2, c_2 — длины соответственно скрещивающихся с ними ребер. Из этой системы легко получить (как?)

$$a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2,$$

а это и есть запись условия (1).

Для доказательства утверждения $(12) \Rightarrow (3)$ мы предварительно заметим, что

$$S_4 = S_1 c_{14} + S_2 c_{24} + S_3 c_{34}, \quad (**)$$

где S_i — площади i -й грани, а c_{ij} — косинус двугранного угла между i -й и j -й гранью. Соотношение (**) сразу следует из теоремы о площади проекции, если спроектировать все грани тетраэдра на четвертую грань. Написав еще три таких соотношения (для трех других граней) и воспользовавшись условием

(12), приходим к системе

$$\begin{aligned} c_{14} + c_{24} + c_{34} &= c_{13} + c_{23} + c_{24} = \\ &= c_{12} + c_{23} + c_{24} = c_{12} + c_{13} + c_{14}, \end{aligned}$$

которая решается точно так же, как (*). Получим

$$c_{14} = c_{23}, \quad c_{24} = c_{14}, \quad c_{34} = c_{12},$$

откуда следует равенство соответствующих углов, т. е. (3).

Утверждение

$$(13) \Rightarrow (12)$$

очевидно следует из формулы для объема тетраэдра $V = Sh/3$.

Чтобы доказать

$$(14) \Rightarrow (1),$$

обозначим через O_i центр тяжести i -й грани и выразим $\overrightarrow{DO_4}$

через стороны $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ (рис. 6). Имеем

$$\overrightarrow{DO_4} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

(докажите это!), откуда, находя скалярный квадрат вектора

$\overrightarrow{DO_4}$, получим

$$\overrightarrow{DO_4}^2 = \frac{1}{9}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Обозначив $a_1 = |\vec{a}|$, $b_1 = |\vec{b}|$, $c_1 = |\vec{c}|$, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ и

воспользовавшись тем, что $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CA} =$

$= \vec{a} - \vec{c}$, можно $\overrightarrow{DO_4}^2$ выразить в виде

$$\overrightarrow{DO_4}^2 = \frac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + \frac{1}{9}(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2).$$

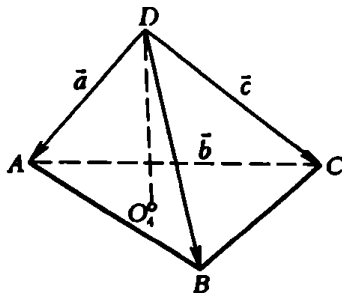


Рис. 6

Написав еще три таких соотношения (для трех остальных граней и приравняв их правые части (что можно по условию (14))), придем к равенствам $a_1^2 = a_2^2$, $b_1^2 = b_2^2$, $c_1^2 = c_2^2$, т. е. получим (1)*.

Наконец, чтобы доказать

$$(15) \Rightarrow (4),$$

рассмотрим две грани тетраэдра, их общее ребро и опирающиеся на это ребро плоские углы. Опишем около граней окружности. По условию их радиусы равны. Величины вписанных углов, опирающихся на общую хорду равных окружностей, или равны, или дают в сумме π . Дальнейшее доказательство сводится к несложному перебору вариантов.

Доказательство эквивалентности оставшихся шести свойств (16) – (21) вместе с выбором соответствующей стратегии мы оставляем читателю. Заметим лишь, что при доказательстве свойства (20) полезно воспользоваться равенством (верным для любого тетраэдра)

$$S_1 \vec{e}_1 + S_2 \vec{e}_2 + S_3 \vec{e}_3 + S_4 \vec{e}_4 = 0,$$

где \vec{e}_i – единичный внешний нормальный вектор i -й грани, а S_i – ее площадь.

Каркасные тетраэдры

Напомним, что *каркасным* называется тетраэдр, для которого существует сфера, касающаяся всех шести ребер тетраэдра. Не всякий тетраэдр каркасный. Например, легко понять, что нельзя построить сферу, касающуюся всех ребер равногранного тетраэдра, если его описанный параллелепипед «длинный» (рис. 5).

Перечислим интересующие нас равносильные свойства тетраэдра.

- (0) Существует сфера, касающаяся всех ребер.
- (1) Суммы длин скрещивающихся ребер равны.
- (2) Суммы двугранных углов при противоположных ребрах равны.
- (3) Окружности, вписанные в грани, попарно касаются.
- (4) Все четырехугольники, получающиеся на развертке тетраэдра (рис. 7), – описанные.
- (5) Перпендикуляры, восстановленные к граням из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке.

* Другое доказательство основано на том, что отрезки, указанные в свойстве (14), пересекаются в одной точке и делятся в отношении 1:3.

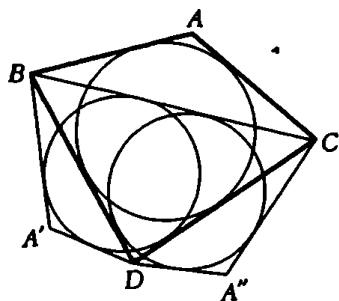


Рис. 7

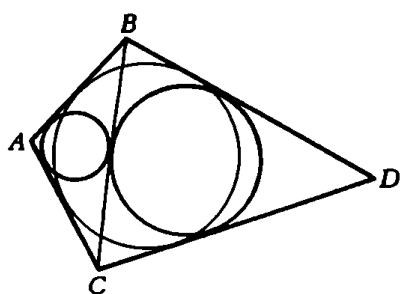


Рис. 8

Равносильность этих свойств предлагаем доказать по схеме

$$(0) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (0).$$

Свойства (2) и (4) в эту схему можно добавить по-разному; выбор стратегии мы оставляем читателю.

Мы не будем проводить здесь доказательства, а отметим лишь два полезных для этой цели факта.

1. Плоский четырехугольник будет описанным тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

2. Если описанный четырехугольник разбить диагональю на два треугольника, то вписанные в треугольники окружности касаются (рис. 8).

Заметим, что из утверждения 1 можно получить общий способ для построения развертки каркасного тетраэдра: взять описанный четырехугольник, разделить на два треугольника (грани) и пристроить еще две грани, пользуясь свойством (1).

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

В. Гутенматер

В школьном курсе геометрии встречаются задачи, в которых требуется найти расстояние от заданной точки до заданной плоскости. Как ни странно, эти задачи вызывают некоторые затруднения у школьников. Поэтому мы остановимся на этом вопросе немного подробнее.

Новая формула

Пусть $A(x_0; y_0; z_0)$ — точка в координатном пространстве $Oxyz$ и α — плоскость, заданная уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Расстояние $\rho(A, \alpha)$ от точки A до плоскости α находится по формуле

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (*)$$

Эту формулу можно описать словами так:

Нужно в выражение $ax + by + cz + d$ вместо переменных x, y, z подставить координаты точки A . Взять модуль полученного числа и разделить его на число $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Вывод формулы

Опустим из точки $A(x_0; y_0; z_0)$ перпендикуляр на плоскость α , заданную уравнением $ax + by + cz + d = 0$; пусть B — точка пересечения этого перпендикуляра с плоскостью α ; тогда AB — расстояние от A до α (см. рисунок). Обозначим через $(x_1; y_1; z_1)$ координаты точки B ; тогда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0),$$

откуда

$$\begin{aligned} AB &= |\overrightarrow{AB}| = \\ &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}. \end{aligned}$$

Поскольку вектор \overrightarrow{AB} перпендикулярен плоскости α , он коллинеарен вектору \vec{n} с координатами (a, b, c) . Это означает, что найдется такое число p , что

$$\overrightarrow{AB} = p \cdot \vec{n}. \quad (1)$$

Из этого равенства следует, что

$$x_1 - x_0 = pa, y_1 - y_0 = pb, z_1 - z_0 = pc. \quad (2)$$

Таким образом,

$$AB = \sqrt{p^2 a^2 + p^2 b^2 + p^2 c^2} = |p| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (3)$$

Осталось найти число $|p|$. Так как точка B принадлежит плоскости α , то $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Поскольку $x_1 = x_0 + pa$, $y_1 = y_0 + pb$, $z_1 = z_0 + pc$ (см. соотношение (2)), для p получаем уравнение

$$a(x_0 + pa) + b(y_0 + pb) + c(z_0 + pc) + d = 0,$$

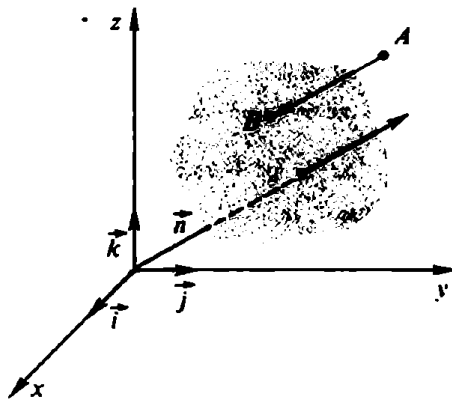
из которого находим $|p|$:

$$|p| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Подставляя найденное значение $|p|$ в соотношение (3), получаем нужную формулу:

$$\rho(A, \alpha) = AB = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Формула (*) позволяет уже легко решить любую задачу на вычисление расстояния от точки до плоскости. Приведем несколько примеров.



Задача 1. Найдите расстояние от точки $A(-1; 3; 0)$ до плоскости α , заданной уравнением $x - 3y - 2z + 5 = 0$.

Решение. По формуле (*) получаем:

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|-1 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{1 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

Задача 2. Вычислите расстояние от начала координат до плоскости $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

Решение. Нам надо найти расстояние от точки $A(0; 0; 0)$. По формуле (*) получаем:

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 14|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{14}{7} = 2.$$

Задача 3. Вычислите расстояние между плоскостями α и β , заданными соответственно уравнениями

$$3x + 2y + 4z + 11 = 0$$

и

$$9x + 6y + 12z - 5 = 0.$$

Решение. Разделив обе части второго уравнения на 3, видим, что плоскости α и β параллельны: $3x + 2y + 4z + 11 = 0$ и $3x + 2y + 4z - 5/3 = 0$.

Возьмем любую точку $A(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащую плоскости β : положим, например, $x_0 = y_0 = 0$, тогда $z_0 = \frac{5}{12}$.

Легко понять, что расстояние между плоскостями α и β равно числу $\rho(A, \alpha)$, где $A = (0; 0; \frac{5}{12})$. Применив формулу (*), получим

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \alpha) = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{5}{12} + 11|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{38}{3\sqrt{29}}.$$

Замечание. В общем случае расстояние между параллельными плоскостями α и β :

$$ax + by + cz + d_1 = 0$$

и

$$ax + by + cz + d_2 = 0$$

находится по формуле

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Выведите эту формулу, повторив решение задачи 3.

В заключение предлагаем вам несколько задач для самостоятельного решения.

Задачи

1. Вычислите расстояние от точки $A(1; 1; 1)$ до плоскости $x + y + z = 0$.
2. Вычислите расстояние от точки $A(1; 2; 3)$ до плоскости $x + y + z - 6 = 0$.
3. Найдите расстояние от точки $A(x_0; y_0; 0)$ до плоскости $ax + by + d = 0$.
4. Найдите уравнения плоскостей, находящихся на расстоянии 1 от плоскости $x + y + z = 0$.
5. Известно, что в треугольной пирамиде все плоские углы при вершине – прямые. Найдите длину ее высоты, если длины ее боковых ребер равны a , b и c .

МНОГОФИГУРНАЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Л. Штернберг

Стереометрическая задача — царица школьного задачника. Если остальные задачи — это задачи «на что-то» («на квадратные уравнения», «на подобие»), то стереометрическая — на все вместе взятое: для ее решения надо применять как чисто стереометрические приемы, так и планиметрические, алгебраические и т. д. Очень важно научиться определять, что и в какой последовательности применять. Об этом и пойдет у нас речь.

Два ключевых момента предлагаемого здесь метода решения многофигурных стереометрических задач — это

- а) разбиение задачи на ряд более простых задач;
- б) последовательное применение алгебры.

Рассмотрим пример.

Задача 1. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S вписан шар. Второй шар касается первого шара, а также плоскости основания пирамиды в точке A . Через центр второго шара и сторону BC основания пирамиды проведена плоскость, пересекающая ребро SA в точке K . Найдите угол наклона этой плоскости к плоскости основания пирамиды, если известно, что ребро SA и диагональ сечения $СК$ перпендикулярны.

Приступая к решению этой задачи, неискушенный школьник обычно пытается нарисовать чертеж, на котором все условия задачи были бы «хорошо видны», и последовательно выразить одни элементы конфигурации через другие. И то, и другое сделать очень трудно, если не невозможно.

Поступим иначе. Нарисуем примерный общий чертеж (рис. 1) и попробуем ответить на вопрос: «Какие размеры надо знать, чтобы точно описать эту конструкцию?» Чтобы полностью определить пирамиду, надо знать, например, длину стороны основания и угол наклона боковой грани, для шаров нужны радиусы, для секущей плоскости — угол ее наклона. Конечно, можно выбрать и другие параметры, скажем высоту пирамиды вместо стороны основания и т. п. Надо лишь, чтобы они позволяли достаточно просто записать условия задачи и выразить искомые величины. Бывает, что первый выбор не совсем удачен и по ходу решения приходится менять переменные или вводить новые.

Итак, пусть a — длина стороны основания пирамиды, α — угол наклона грани пирамиды к основанию, r и R — радиусы первого и второго шаров, φ — угол наклона секущей плоскости. Ясно, что между этими величинами имеются определенные соотношения, их мы и попытаемся найти. Обратите внимание: не выразить одно через другое, а найти соотношения. Вычислить в итоге нам надо будет только φ .

Выделим теперь связки фигур, т. е. группы фигур данной конструкции, связанных друг с другом условиями задачи:

- 1) пирамида и вписанный шар;
- 2) основание пирамиды и два шара (подчеркнем: только основание, а не вся пирамида);
- 3) основание пирамиды, второй шар и секущая плоскость;
- 4) секущая плоскость и пирамида (а здесь нельзя обойтись одной прямой SA , так как существенно, что это — ребро пирамиды).

Сделаем для каждой связки отдельный чертеж, развернув ее так, чтобы было удобно видеть составляющие ее фигуры. Рядом с отрезками, длины которых нам известны, запишем эти длины (в виде формул). Это очень важный момент: длины на чертеже помогут увидеть уравнения. Процесс расстановки длин на чертеже мы назовем *разметкой чертежа*. Теперь для каждой связки выпишем получающиеся соотношения.

1-я связка фигур. Плоскость, проходящая через высоту пирамиды и апофему SE грани SBC , пересекает пирамиду по равнобедренному треугольнику, а шар — по вписанному в него кругу радиусом r (рис. 2, а). (Это и подобные ему утверждения в записи решения должны быть доказаны, сколь бы очевидными они ни казались. Но для нас сейчас важнее сам поиск решения и получение ответа, поэтому такого рода пояснения мы опускаем. А тому, что и как доказывать, как «навести стро-

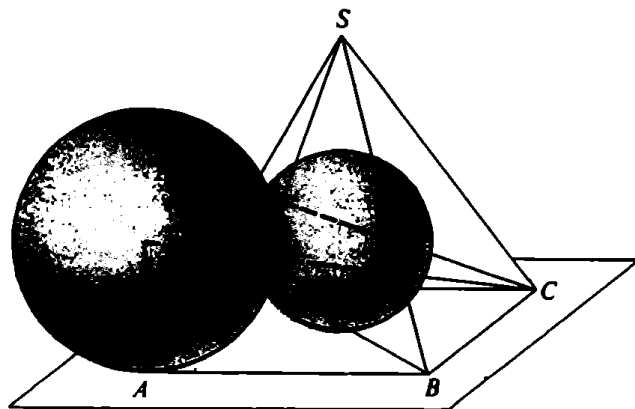


Рис. 1

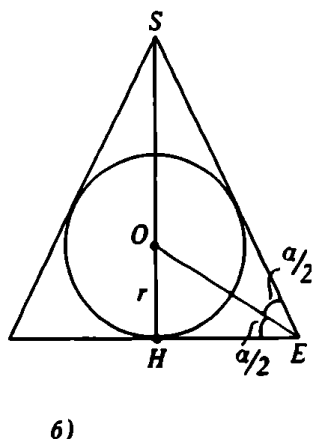
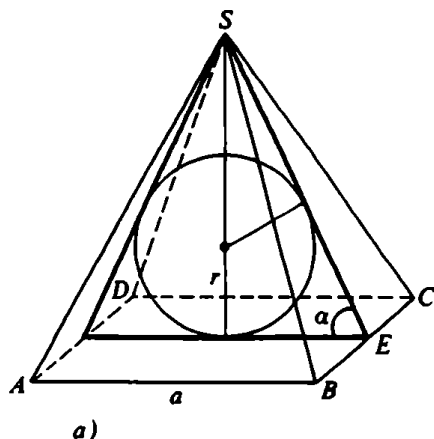


Рис. 2

гость», уделяется достаточно много внимания в школе и в различных пособиях для поступающих.) Начертим сечение отдельно (рис. 2, б). Центр O вписанного шара лежит на биссектрисе угла SEH , который по величине равен углу между боковой гранью и основанием пирамиды. Отсюда вытекает первое соотношение:

$$r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Заметим, что тот же рисунок 2, б можно было бы получить, пользуясь не сечением, а проекцией пирамиды на плоскость, перпендикулярную ребру BC .

2-я связка фигур. Вынесем на отдельный чертеж оба шара и основание пирамиды (рис. 3, а). Выберем такой ракурс, чтобы нужные нам отрезки и углы были видны в натуральную величину (рис. 3, б). Проведя очевидные вспомогательные построения (не забудьте проделать нужные доказательства) и разметив чертеж, получим уравнение

$$(R + r)^2 - (R - r)^2 = \left[\frac{a\sqrt{2}}{2} \right]^2.$$

(Тот же чертеж получается в сечении, проходящем через центры шаров и точки их касания с основанием.)

3-я связка фигур. Процедура аналогична: вынося связку на отдельный чертеж (рис. 4, а), проводя вспомогательные построения и разметку (докажите, что $\angle PBA = \varphi$) и рисуя сечение (плоскостью PAB — рис. 4, б), из прямоугольного треугольника PAB получаем уравнение

$$R = a \operatorname{tg} \varphi.$$

4-я связка фигур. Еще раз та же процедура; на рисунке

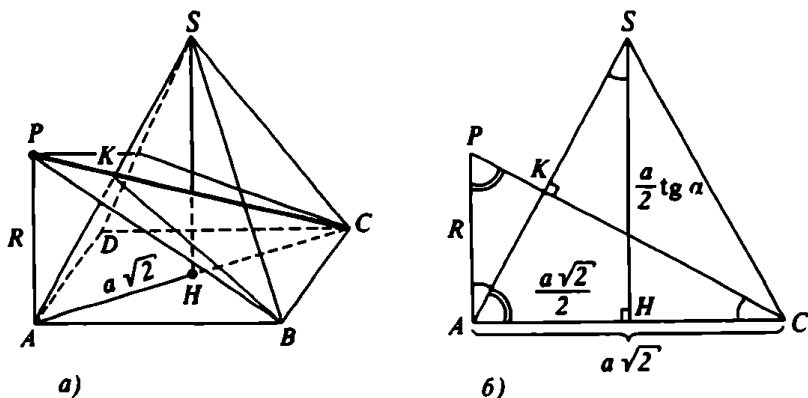


Рис. 5

5, а показан чертеж связки с разметкой, на рисунке 5, б — чертеж «удобного» сечения плоскостью ACS , на котором все нужные углы (они помечены дужками) видны в натуральную величину. Некоторые из этих углов, как легко заметить по рисунку, равны. Отсюда вытекает подобие треугольников PAC и AHS и уравнение

$$\frac{R}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}/2}{(a \operatorname{tg} \alpha)/2}, \text{ или } R = 2a \operatorname{ctg} \alpha.$$

А теперь проверим, все ли условия задачи использованы, — это очень полезный прием контроля.

1) *Пирамида правильная.* Условие использовано при определении длин отрезков в пирамиде.

2) *Первый шар описан.* Использовано при составлении уравнения 1-й связки на рисунке 3, б ($\angle AHO = 90^\circ$).

3) *Второй шар касается первого.* Использовано при определении расстояния между центрами шаров (рис. 3, б).

4) *Второй шар касается плоскости основания.* Использовано на рисунке 3, б ($\angle HAR = 90^\circ$) и при составлении уравнения 3-й связки ($\angle PAB = \varphi$).

5) *Перпендикулярность ребра SA и диагонали сечения SK .* Использовано при составлении уравнения 4-й связки.

Итак, все условия использованы. Получено 4 уравнения с 5-ю неизвестными. Так как надо найти только одну величину, которая размерности не имеет, то размерные величины должны сократиться. Значит, нехватка одного уравнения помешать не должна.

Все! Геометрия окончена — начинается алгебра (в которой абитуриент обычно чувствует себя увереннее). Соберем полученные уравнения в систему:

$$\begin{cases} r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \\ (r + R)^2 - (R - r)^2 = \left[\frac{a\sqrt{2}}{2} \right]^2, \text{ или } 8Rr = a^2, \\ R = a \operatorname{tg} \varphi, \\ R = 2a \operatorname{ctg} \alpha. \end{cases}$$

Размерные величины R , r и a из нее без труда исключаются, после чего остается система из двух уравнений с неизвестными φ и α :

$$\begin{cases} 4 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1, \\ \operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{ctg} \alpha. \end{cases}$$

Решение этой системы оставим читателям. { Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$. }

Подведем итоги. Решение стереометрической задачи со многими фигурами и связями между ними можно разбить на следующие этапы:

1. *Построить чертеж* — общий вид конфигурации. На чертеже не должно быть вспомогательных линий: они лишь затемняют общую картину.

2. *Ввести переменные*, определяющие размеры элементов чертежа. Не бояться, если этих переменных окажется много: их должно быть достаточно, чтобы построить каждый элемент конфигурации в отдельности.

3. *Выделить связки фигур*, пользуясь общим чертежом и условиями задачи.

4. *Вынести на отдельный чертеж каждую связку, разметить чертежи*.

5. *Выбрать такой ракурс* (или такое сечение) для каждой связки, чтобы все отрезки и углы, которые предполагается связать уравнением, были видны в натуральную величину. Разметить полученный чертеж.

6. *Выписать уравнения*, получающиеся из каждой связки фигур. Не торопиться их разрешать относительно какой-либо величины.

7. Проверить использование всех условий, количество уравнений и неизвестных и возможность нахождения того значения, которое требуется по условию.

8. *Свести уравнения в систему и решить ее*, забыв про геометрию и пользуясь приемами алгебры и тригонометрии.

9. *Проверить решение*.

Техника проверки геометрических решений заслуживает отдельного разговора. Сейчас мы познакомимся с одним из ее

приступим к выделению связок и составлению уравнений. Пусть $a_1 = OA_1$, $a_2 = OA_2$, $b_1 = OB_1$. Аналогично определим величины b_2 , c_1 , c_2 , d_1 и d_2 . (Надеемся, 8 неизвестных не смущают читателя и он готов ввести еще хоть сотню, если потребуются.) Два уравнения видны сразу:

$$d_1 = d_2 = l \quad (1)$$

(«связка» здесь — отрезок D_1D_2 и его середина O). Вторая связка — треугольники OB_2C_1 и OB_1C_2 (рис. 7). Выражая их площади через угол $\varphi = \angle B_2OC_1 = \angle B_1OC_2$ и заключающие его стороны, получим

$$\frac{S_{OB_2C_1}}{S_{OB_1C_2}} = \frac{0,5 \cdot b_2 c_1 \sin \varphi}{0,5 \cdot b_1 c_2 \sin \varphi} = \frac{b_2 c_1}{b_1 c_2},$$

следовательно,

$$\frac{b_2 c_1}{b_1 c_2} = k \quad (2)$$

Аналогично записывается и отношение объемов пирамид (связка состоит из тетраэдров $OA_1B_1C_1$ и $OA_2B_2C_2$). Найдем, например, объем пирамиды $OA_1B_1C_1$ (рис. 8). Пусть C_1H — ее высота, опущенная на основание OA_1B_1 , тогда

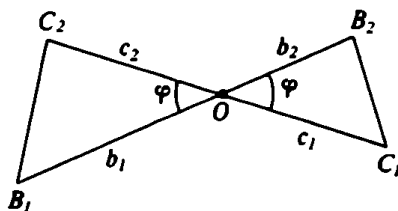


Рис. 7

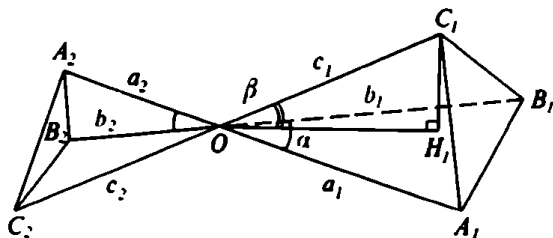


Рис. 8

$$V_{OA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} S_{OA_1B_1} \cdot C_1H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a_1 b_1 \sin \alpha \cdot c_1 \sin \beta = \\ = \frac{1}{6} a_1 b_1 c_1 \sin \alpha \sin \beta,$$

где $\alpha = \angle A_1OB_1$, а β — угол между ребром OC_1 и основанием. Точно так же

$$V_{OA_2B_2C_2} = \frac{1}{6} a_2 b_2 c_2 \sin \alpha \sin \beta,$$

поэтому $V_{OA_1B_1C_1} : V_{OA_2B_2C_2} = a_1 b_1 c_1 : a_2 b_2 c_2$. Отсюда получаем следующее уравнение:

$$\frac{a_1 b_1 c_1}{a_2 b_2 c_2} = m, \quad (3)$$

и, таким же образом,

$$\frac{a_2 b_1 d_1}{a_1 b_2 d_2} = n. \quad (4)$$

Остается неиспользованным лишь одно условие: все точки (кроме O) лежат на сфере. Его нужно записать в виде соотношения между длинами отрезков OA_1 , OA_2 , OB_1 , ... Рассмотрим связку, состоящую из сферы и отрезков A_1A_2 и B_1B_2 . Пересекая ее плоскостью, содержащей эти отрезки, получим рисунок 9. Треугольники OA_1B_1 и OA_2B_2 подобны (так как $\angle A_1OB_1 = \angle A_2OB_2$, $\angle B_1A_1O = \angle OB_2A_2 = \frac{1}{2} \angle B_1A_2$), поэтому $OA_1 : OB_1 = OB_2 : OA_2$, т. е.

$$a_1 a_2 = b_1 b_2. \quad (5)$$

Аналогично,

$$b_1 b_2 = c_1 c_2 = d_1 d_2. \quad (6)$$

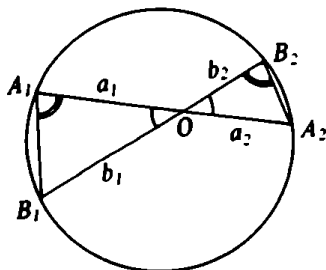


Рис. 9

Очевидно, равенства (1) – (6) содержат фактически 8 уравнений (столько же, сколько неизвестных), и все условия задачи использованы. Решаем систему из этих уравнений и получаем ответ: $a_1 = \left[\frac{m}{kn^2} \right]^{1/6} l$, $b_1 = \left[\frac{mn}{k} \right]^{1/6} l$, $c_1 = (k^2 mn)^{1/6} l$.

Приемы, с которыми мы познакомили читателей, с большим или меньшим успехом можно применять почти к любой стереометрической задаче. Поэтому овладеть ими необходимо: это поможет преодолеть робость, которую испытывают многие абитуриенты, сталкиваясь со стереометрией на конкурсных экзаменах.

Упражнения

1. В треугольнике ABC длины сторон $AC=12$, $AB=BC=3\sqrt{10}$. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и C и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами этих шаров равно 15. Центр третьего шара находится в точке B , и этот шар касается двух данных шаров. Определите радиус третьего шара.

2. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45° . Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается продолжения ребра BS за вершину S . Через центр шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найдите угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

3. На сфере с радиусом 11 расположены точки A, A_1, B, B_1, C и C_1 . Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M , отстоящей от центра сферы на расстояние $\sqrt{59}$. Найдите длину отрезка AA_1 , если известно, что $BB_1=18$, а точка M делит отрезок CC_1 в отношении $(8+\sqrt{2}) : (8-\sqrt{2})$.

4. Отрезок DE , лежащий в двугранном угле AD с точками B и C на его гранях, параллелен плоскости треугольника ABC , имеющего площадь S . В тетраэдр $BCDE$ вписан шар, k – отношение расстояния от центра шара до прямой DE к расстоянию от DE до плоскости ABC . Пусть B' – проекция точки B на плоскость CDE ; известно, что $\operatorname{tg} \angle B'DE : \operatorname{tg} \angle BDE = l$. Через середину отрезка AD проводится плоскость P , параллельная плоскости ABC . Найдите площадь сечения многогранника $ABCDE$, составленного из тетраэдров $ABCD$ и $BCDE$, плоскостью P , если известно, что сумма площадей всех граней тетраэдра $BCDE$ равна σ .

Обычно говорят, что площадь $S(F)$ фигуры F есть число, показывающее, из скольких единиц площади «составляется» эта фигура (за единицу площади берется квадрат, сторона которого равна единице длины). Однако такое наглядное пояснение не может служить точным математическим определением понятия площади. Неясно, например, каким образом из единиц площади «составляется» круг заданного радиуса.

Один из способов уточнения понятия площади основывается на рассмотрении *палетки* — разбиения плоскости на равные квадраты. Пусть сторона квадрата палетки имеет длину 1. На рисунке 1 фигура F содержит фигуру, составленную из 9 квадратов палетки, и содержится в фигуре, составленной из 29 квадратов; поэтому $9 \leq S(F) \leq 29$. Для более точной оценки можно использовать палетку, квадраты которой имеют стороны длиной $1/10$ (так что в каждом квадрате прежней палетки содержится 100 квадратов новой палетки). Если, скажем, F содержит фигуру, составленную из 1716 квадратов новой палетки, и содержится в фигуре, составленной из 1925 таких квадратов, то $17,16 \leq S(F) \leq 19,25$. Еще раз измельчая палетку (т. е. уменьшая в 10 раз длины сторон квадратов), мы сможем еще точнее оценить $S(F)$, и т. д.

Описанный процесс измерения используется не только для вычисления площади, но и для самого определения понятия

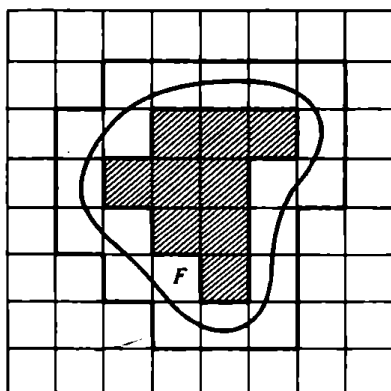


Рис. 1

площади. Именно, рассмотрим палетку, у которой длины сторон квадратов равны $1/10^k$. Пусть F содержит фигуру, составленную из a_k квадратов этой палетки, и содержится в фигуре, составленной из b_k таких квадратов (например, выше у нас $a_1 = 1716$, $b_1 = 1925$). Тогда можно сказать, что $a_k/10^{2k}$ есть значение площади фигуры F с *недостатком*, а $b_k/10^{2k}$ — с *избытком*. Неограниченно увеличивая k , мы можем рассмотреть пределы

$$\underline{S}(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{10^{2k}}, \quad \bar{S}(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{10^{2k}},$$

первый из которых называется *нижней*, а второй — *верхней* площадью фигуры F .

Если F такова, что эти пределы совпадают, то фигура F называется *квадрируемой*, а число $\underline{S}(F) = \bar{S}(F)$, т. е. совпадающее значение рассмотренных пределов, называется *площадью* фигуры F и обозначается через $S(F)$.

Нетрудно привести пример фигуры, у которой верхняя и нижняя площади *не совпадают*. С этой целью из квадрата площадью 1 удалим крест, площадь которого меньше $1/4$ (рис. 2, а). Затем в каждом из четырех оставшихся квадратов удалим по кресту так, чтобы сумма площадей всех четырех крестов была меньше $1/8$ (рис. 2, б). Затем удалим 16 крестов общей площадью меньше $1/16$ (рис. 2, в), и т. д. Фигуру, которая останется после бесконечного числа удалений крестов, обозначим через Q . Заметим, что общая площадь всех удаленных крестов меньше чем $1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots + 1/2^n + \dots$, т. е. мень-

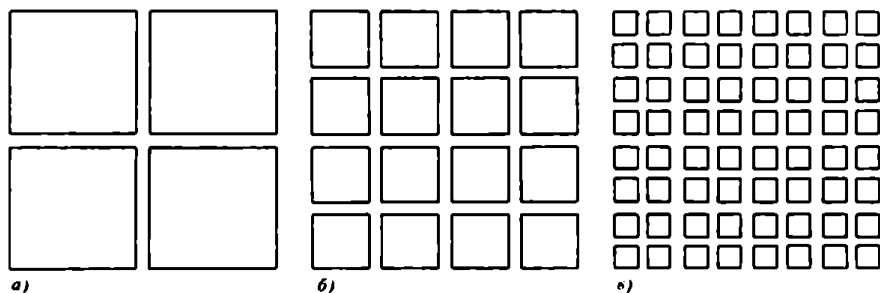


Рис. 2

ше $1/2$. Поэтому оставшуюся фигуру Q невозможно поместить в фигуру площадью $1/2$, т. е. верхняя площадь фигуры Q больше $1/2$. В то же время фигура Q не содержит никакого квадрата (каким бы маленьким он ни был), и потому нижняя площадь фигуры Q равна нулю. Таким образом, $\bar{S}(Q) \neq \underline{S}(Q)$, т. е. фигура Q *неквадрируема*.

Этот пример показывает, что понятие площади применимо не ко всякой фигуре. Однако можно доказать (мы здесь это доказательство приводить не будем), что *всякий многоугольник является квадрируемой фигурой*. Точно так же любая выпуклая фигура (в частности, круг) квадрируема. Вообще же класс квадрируемых фигур является весьма обширным.

Теперь можно сказать, что площадь S представляет собой функцию, заданную на классе всех квадрируемых фигур и принимающую числовые значения, т. е. площадь $S(F)$ каждой фигуры F есть число (единица площади предполагается фиксированной).

Используя данное определение площади (с помощью палеток), можно доказать ряд свойств площади. Основными являются следующие четыре свойства:

(α) *функция S неотрицательна*, т. е. $S(F) \geq 0$ для любой квадрируемой фигуры F ;

(β) *функция S аддитивна*, т. е. если F_1 и F_2 — квадрируемые фигуры, не имеющие общих внутренних точек, то

$$S(F_1 \cup F_2) = S(F_1) + S(F_2);$$

(γ) *функция S инвариантна относительно перемещений*, т. е. если $F_1 = F_2$, то $S(F_1) = S(F_2)$;

(δ) *единичный квадрат имеет площадь 1*.

После рассмотрения этих свойств наступает поворотный пункт в теории площадей. Дело в том, что справедлива следующая

Теорема существования и единственности. *На классе всех квадрируемых фигур существует, и притом только одна, функция S , обладающая свойствами (α), (β), (γ), (δ).*

Теорема эта играет весьма важную роль. Изложенное выше определение площади (с помощью палеток) можно назвать *конструктивным*, поскольку площадь определяется с помощью четко описанной конструкции (процесса измерения). Теперь же можно дать другое описание понятия площади; грубо говоря, *площадь* есть «то, что обладает свойствами (α), (β), (γ), (δ)». В самом деле, согласно теореме существования и единственности, кроме площади, нет никакой другой функции, обладающей указанными свойствами. Более точно, мы можем теперь сказать, что площадью *называется* числовая функция, заданная на множестве всех квадрируемых фигур и удовлетворяющая условиям (α), (β), (γ), (δ). При таком подходе свойства (α), (β), (γ), (δ) доказывать не нужно (они рассматриваются как аксио-

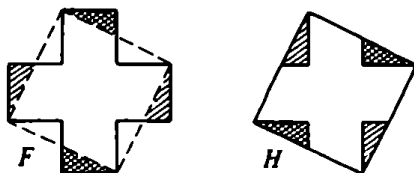


Рис. 3

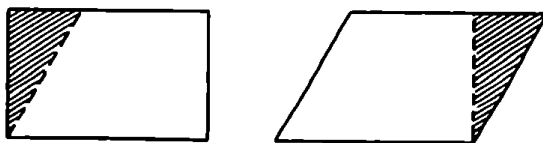


Рис. 4

мы площади), а само определение становится *аксиоматическим*, а не конструктивным, как прежде.

При аксиоматическом определении площади палетки становятся ненужными*, а все дальнейшие свойства площади выводятся из аксиом (α) , (β) , (γ) , (δ) как теоремы. Например, из аксиом можно вывести, что при $F \supset G$ справедливо неравенство $S(F) \geq S(G)$ (свойство *монотонности* площади); что для любых квадратуемых фигур F_1 , F_2 справедливо соотношение $S(F_1 \cup F_2) = S(F_1) + S(F_2) - S(F_1 \cap F_2)$, что отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия и т. д.

Перейдем, наконец, к вопросу о вычислении площадей. Самым простым методом вычисления площадей, известным еще в глубокой древности, является *метод разложения*. Для уяснения этого метода рассмотрим фигуры F и H , изображенные на рисунке 3. Пунктирные линии разбивают эти фигуры на одинаковое число соответственно равных частей, т. е. фигуры F и H *равносоставлены*. Вообще, две фигуры называются *равносоставленными*, если, разрезав одну из них на конечное число частей, можно (располагая эти части иначе, т. е. рассматривая фигуры, равные этим частям) составить из них вторую фигуру.

Из аксиом (β) и (γ) непосредственно следует, что две *равносоставленные* фигуры *равновелики*, т. е. имеют одинаковую площадь. На этом и основан метод разложения: фигуру, площадь которой нужно вычислить, пытаются разбить на конечное число частей так, чтобы из этих частей можно было составить более простую фигуру (площадь которой уже известна). Например, параллелограмм *равносоставлен* с прямоугольником, имеющим то же основание и ту же высоту (рис. 4), и потому, зная

* Правда, понятие квадратуемости было выше определено с помощью палеток, но этого также можно избежать.

формулу площади прямоугольника, мы устанавливаем формулу площади параллелограмма. Треугольник равносоставлен с параллелограммом, который имеет то же основание и вдвое меньшую высоту (рис. 5), и это позволяет вычислить площадь треугольника.

Умея вычислять площадь треугольника, легко вычислить площадь любого многоугольника: достаточно разбить его на треугольники и воспользоваться аксиомой (β), т. е. сложить площади этих треугольников. Заметим, что при любом другом способе разбиения на треугольники результат будет *тем же самым*. Действительно, результат и того и другого вычисления даст *однозначно* определенное число: площадь $S(F)$ рассматриваемого многоугольника (вот где «работает» теорема существования и единственности!).

Несмотря на простоту и удобство метода разложения, обойтись *только* этим методом для вычисления площадей различных квадратуемых фигур не удастся. Например, вычислить площадь круга этим методом невозможно: как бы мы ни разрезали круг на конечное число частей, составить из них многоугольник (т. е. «более простую фигуру, площадь которой мы умеем вычислять»), не удастся. В связи с этим применяется еще один метод вычисления площадей, называемый *методом исчерпывания*. Это метод также известен из глубокой древности: его открытие связано с именем Архимеда. Существо метода состоит в следующем. *Рассматривается квадратуемая фигура F и последовательность вложенных в нее квадратуемых фигур G_1, G_2, \dots (рис. 6). Если часть фигуры F , не заполненная фигурой G_n , имеет площадь, неограниченно уменьшающуюся при $n \rightarrow \infty$, то $S(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(G_n)$.* Фигуры G_1, G_2, \dots как бы постепенно

«исчерпывают» всю площадь фигуры F , и это позволяет вычислить $S(F)$.

Примером применения метода исчерпывания может служить такой способ вычисления площади круга. В этом случае фигурами G_1, G_2, \dots являются вписанные в круг F правильные многоугольники, каждый из которых имеет вдвое большее число сторон, чем предыдущий (рис. 7). Равенство $S(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(G_n)$ и позволяет вычислить площадь круга. Архимед

применил метод исчерпывания не только для вычисления площади круга, но также для вычисления площади сегмента параболы (рис. 8).

Наиболее универсальным методом вычисления площади является применение *первообразной*. Пусть на координатной плоскости задана замкнутая линия, не пересекающая сама себя; фигуру, ограниченную этой линией, обозначим через F . Проекция фигуры F на ось абсцисс представляет собой некоторый отрезок $[a, b]$. Для простоты предположим, что для любой

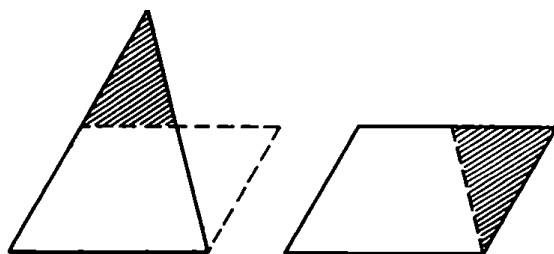


Рис. 5

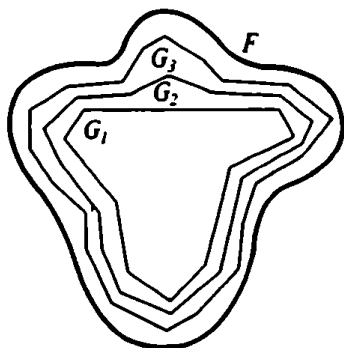


Рис. 6

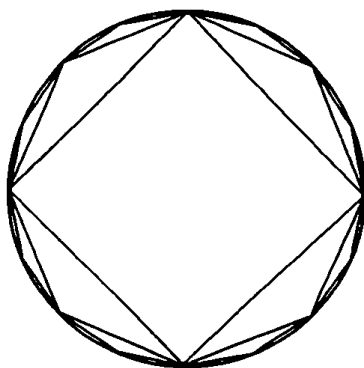


Рис. 7

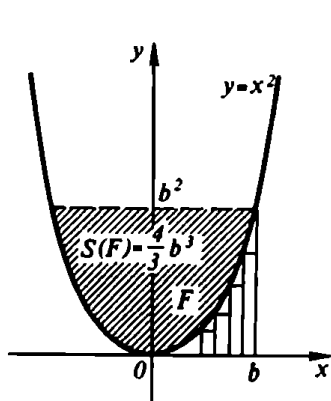


Рис. 8

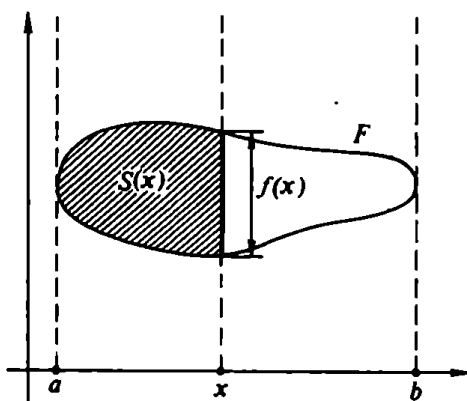


Рис. 9

внутренней точки x отрезка $[a; b]$ прямая, параллельная оси ординат и проходящая через эту точку, пересекает фигуру F по отрезку (рис. 9); длину этого отрезка обозначим через $f(x)$. Далее, через $S(x)$ обозначим площадь той части фигуры F , которая расположена левее проведенной через точку x прямой.

Нетрудно доказать, что функция S является первообразной для f на отрезке $[a; b]$, т. е. $S'(x) = f(x)$ при $x \in [a; b]$. В самом

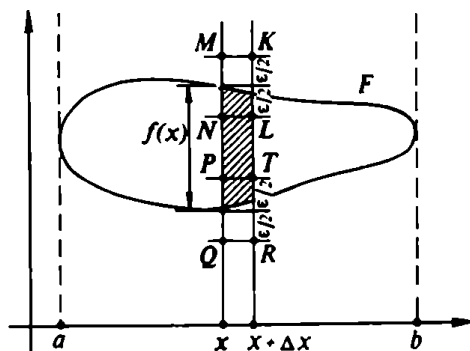


Рис. 10

деле, пусть ε — произвольное положительное число, меньшее $f(x)$. На прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку x , возьмем точки M, N, P, Q , отстоящие на $\varepsilon/2$ от концов отрезка, по которому взятая прямая пересекает фигуру F (рис. 10). Точки M, Q расположены вне фигуры F , а N, P — внутренние точки этой фигуры. Следовательно, существует такое $\delta > 0$, что отрезки с длинами 2δ , параллельные оси абсцисс и имеющие середины в точках M, N, P, Q , расположены: первый и последний — вне фигуры F , а второй и третий — внутри нее. Пусть теперь Δx — положительное число, меньшее δ . Разность $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ равна площади заштрихованной на рисунке 10 фигуры. Эта площадь заключена между площадями прямоугольников $NLTP$ и $MKRQ$, т. е.

$$(f(x) - \varepsilon) \Delta x < \Delta S(x) < (f(x) + \varepsilon) \Delta x.$$

Отсюда

$$f(x) - \varepsilon < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < f(x) + \varepsilon \quad (*)$$

при $0 < \Delta x < \delta$.

Аналогично проверяется, что полученное неравенство выполняется и для всех отрицательных Δx , если только $-\delta < \Delta x < 0$. Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $0 < |\Delta x| < \delta$ выполняется неравенство (*). По определению предела это означает, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x),$$

т. е.

$$S'(x) = f(x).$$

Доказанное равенство позволяет вычислить площадь фигуры F . Пусть φ — какая-нибудь первообразная для функции f . Так как S — также первообразная для этой функции, то φ и S

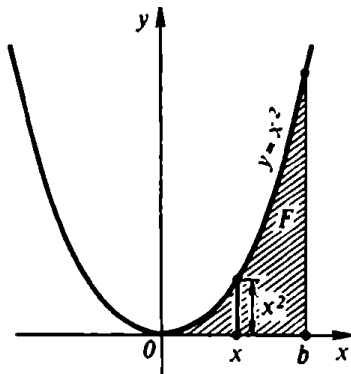


Рис. 11

отличаются на константу, т. е. существует такое число c , что $\varphi(x) = S(x) + c$ для любого $x \in [a; b]$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi(b) - \varphi(a) &= (S(b) + c) - (S(a) + c) = \\ &= S(b) - S(a) = S(F)\end{aligned}$$

(поскольку $S(a) = 0$, а $S(b)$ есть площадь всей фигуры F). Итак, если φ — какая-нибудь первообразная для функции f , то разность $\varphi(b) - \varphi(a)$ равна площади фигуры F , т. е.

$$S(F) = \int_a^b f(x) dx.$$

Если, например, F представляет собой «криволинейный треугольник», ограниченный параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = b$ (рис. 11), то прямая, которая проходит через точку x отрезка $[a; b]$ и параллельна оси ординат, отсекает из этого «треугольника» F отрезок длиной x^2 , т. е. в данном случае $f(x) = x^2$. Для функции $f(x) = x^2$ одной из первообразных является функция $\varphi(x) = \frac{1}{3} x^3$. Следовательно, площадь фигуры F находится по формуле

$$S(F) = \varphi(b) - \varphi(0) = \frac{1}{3} b^3.$$

Заметим, что, вычитая из площади прямоугольника $ABCD$ (рис. 12) удвоенную площадь «треугольника» F , мы получаем площадь сегмента параболы, которая, таким образом, оказывается равной $\frac{4}{3} b^2$. Как видите, с помощью первообразной очень просто получается тот результат, который Архимед выводил с помощью сложного рассуждения, основанного на использовании метода исчерпывания. Сегодняшние школьники знают намного больше того, что было известно великому Архимеду!

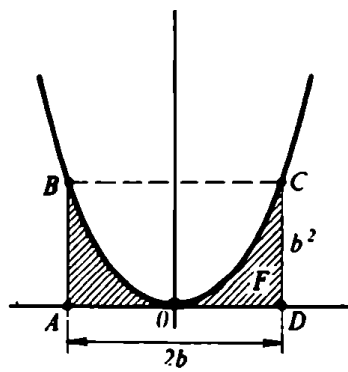


Рис. 12

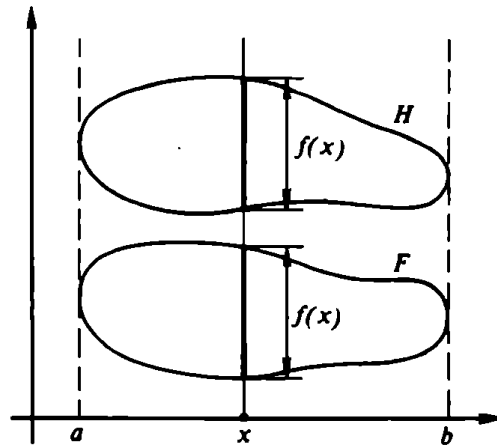


Рис. 13

Заканчивая рассказ о понятии площади, рассмотрим так называемый *принцип Кавальери*. Пусть, кроме F , имеется еще одна фигура H (рис. 13), проекцией которой на ось абсцисс служит тот же отрезок $[a; b]$.

Предположим, кроме того, что каждая прямая, параллельная оси ординат, пересекает фигуры F и H по равным отрезкам. Тогда площадь фигуры H выражается тем же интегралом,

что и площадь фигуры F , т. е. $S(H) = \int_a^b f(x) dx$, и потому

$$S(F) = S(H).$$

Итак, если любая прямая, параллельная заданной фиксированной прямой (например, оси ординат), пересекает фигуры F и H по равным отрезкам, то фигуры F и H равновелики.

Это и есть принцип Кавальери (для площадей). Мы вывели его с помощью формулы, выражающей площадь фигуры

через интеграл. Кавальери же высказал свой принцип (и применял его для вычисления площадей и объемов) еще до того, как в трудах Ньютона, Лейбница и других ученых были выведены понятия первообразной и интеграла.

На рисунке 14 показаны две фигуры, которые в силу принципа Кавальери являются равновеликими. Впрочем, равенство площадей этих фигур можно легко установить и методом разбиения (как?).

Понятие *объема* вводится аналогично понятию площади. При конструктивном определении рассматриваются *кубиляжи* (аналоги палеток), т. е. разбиения пространства на равные кубы. Рассмотрим кубиляж, у которого длина ребер кубов равна $1/10^k$. Пусть пространственная фигура F содержит фигуру, составленную из a_k кубов этого кубиляжа, и содержится в фигуре, составленной из b_k таких кубов. Тогда $\frac{a_k}{10^{3k}}$ есть значение

объема фигуры F с *недостатком*, а $\frac{b_k}{10^{3k}}$ — с *избытком*. Если фигура F такова, что пределы

$$\underline{V}(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{10^{3k}}, \quad \overline{V}(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{10^{3k}}$$

совпадают, то фигура F называется *кубируемой*, а число $\underline{V}(F) = \overline{V}(F)$ называется *объемом* фигуры F и обозначается через $V(F)$. Объем V представляет собой *функцию*, заданную на классе всех кубируемых фигур и принимающую числовые значения.

Как и площадь, объем может быть определен аксиоматически, причем аксиомы, на которых основывается понятие объема, совершенно аналогичны аксиомам площади:

(а) *функция V неотрицательна*, т. е. $V(F) \geq 0$ для любой кубируемой фигуры F ;

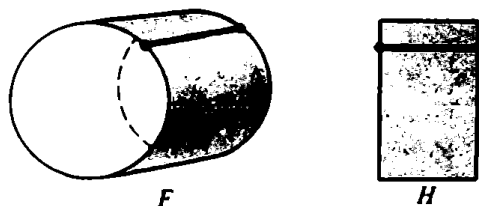


Рис. 14

(β) *функция V аддитивна*, т. е. если F_1 и F_2 — кубируемые фигуры, не имеющие общих внутренних точек, то

$$V(F_1 \cup F_2) = V(F_1) + V(F_2);$$

(γ) *функция V инвариантна относительно перемещений*, т. е. если $F_1 = F_2$, то $V(F_1) = V(F_2)$;

(δ) *единичный куб* (т. е. куб, ребро которого имеет длину 1) *имеет объем 1*.

Как и в случае площадей, имеет место теорема существования и единственности.

Не останавливаясь на других методах, рассмотрим вычисление объемов при помощи интегрирования и принцип Кавальери для объемов. Пусть в пространстве задана система координат и взята некоторая фигура F , проекция которой на ось абсцисс представляет собой некоторый отрезок $[a; b]$. Через $S(x)$ обозначим площадь фигуры, отсекаемой из F плоскостью, которая перпендикулярна оси абсцисс и проходит через точку x отрезка $[a; b]$. Далее, через $V(x)$ обозначим объем той части фигуры F , которая расположена левее проведенной плоскости (рис. 15). Тогда справедливо равенство $V'(x) = S(x)$, т. е. V является первообразной для функции S . Доказательство этого равенства — такое же, как и в случае площадей.

Конечно, чтобы доказательство прошло, следует сделать некоторые предположения. Фигура F должна быть кубируемой, ее сечения — квадратуемыми. Кроме того, следует сделать некоторые предположения о характере границы тела F (чтобы прошло рассуждение, аналогичное показанному на рис. 10). В школе, например, справедливость равенства $V'(x) = S(x)$ обосновывается для случая, когда F — фигура вращения спе-

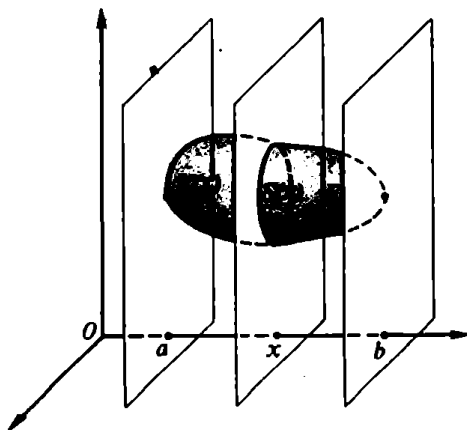


Рис. 15

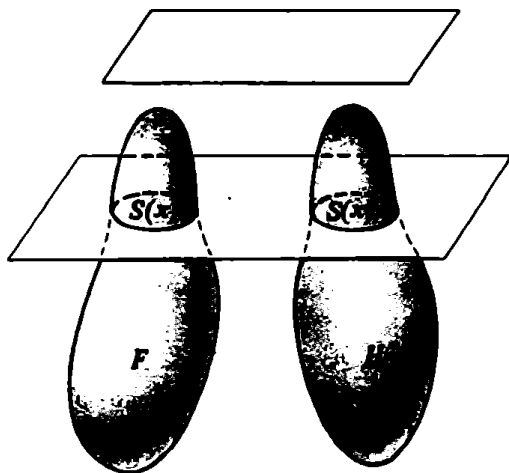


Рис. 16

циального вида. Мы на этом не останавливаемся. Из равенства $V'(x) = S(x)$ следует, что для объема фигуры F справедлива формула

$$V(F) = \int_a^b S(x) dx.$$

Наконец, из этой формулы вытекает *принцип Кавальери для объемов*: если любая плоскость, параллельная заданной фиксированной плоскости, пересекает пространственные фигуры F и H по фигурам, имеющим одинаковую площадь (рис. 16), то фигуры F и H равновелики: $V(F) = V(H)$. Изящный пример применения принципа Кавальери к вычислению объемов имеется в публикуемой в настоящем сборнике заметке М. Мамикона.

ОБЪЕМ ШАРА

М. Маликон

Наверное, каждый школьник хорошо знает, чему равен объем шара. А знаете ли вы, что первым объем шара посчитал древний грек Архимед еще в третьем веке до н. э.?

Объем шара Архимед нашел двумя способами. Первый способ заключался в составлении интегральных сумм и, по существу, был очень близок к современному методу интегрирования. Второй, более элементарный способ Архимеда состоял в использовании механического принципа, сочетающего в себе принцип поперечных сечений и найденное им же правило рычага.

Архимед установил, что объем шара в полтора раза меньше объема цилиндра, описанного около шара:

$$V_{\text{ш}} = \frac{2}{3} V_{\text{ц}}.$$

Этот результат Архимед считал самым большим своим достижением. По завещанию Архимеда на его могиле был высечен шар, вписанный в цилиндр. Именно по этому признаку могилу Архимеда через полтора столетия разыскал Цицерон. Сейчас она снова утеряна.

В первой части статьи мы расскажем, как Архимед нашел объем шара с помощью своего механического метода. А затем решим эту задачу чисто геометрически.

Еще до Архимеда был известен принцип поперечных сечений, ныне известный как «принцип Кавальери» (см. статью В. Болтянского «О понятиях площади и объема»).

Пусть в пространстве заданы два тела, и пусть любая плоскость, параллельная данной, в сечении с этими телами образует две фигуры, площади которых равны друг другу: $S_1 = S_2$. (При этом сечение каждого тела, вообще говоря, является переменным.) Тогда эти два тела имеют равные объемы: $V_1 = V_2$.

Представим себе, что оба тела выложены из очень тонких плоскопараллельных слоев одинаковой толщины. Если каждый слой одного тела весит столько, сколько весит соответствующий ему слой в другом теле, то и целиком оба тела весят одинаково.

Очевидно теперь, что принцип поперечных сечений справедлив и в более общей форме: если заданы три тела и в каждом из плоскопараллельных сечений площади сечений первых двух тел в сумме равны площади сечения третьего тела: $S_1 + S_2 = S_3$, то сумма объемов первых двух тел равна объему третьего тела: $V_1 + V_2 = V_3$.

Как мы увидим ниже, Архимед, применяя более общее, механическое развитие принципа поперечных сечений, сумел выразить объем шара через объемы цилиндра и конуса. Последние же были посчитаны еще до Архимеда. В частности, Евдокс показал, что объем конуса в три раза меньше объема описанного около него цилиндра.

Метод Архимеда

Нарисуем, следуя Архимеду, круг с радиусом R и прямоугольник, имеющий с кругом общий центр O , со сторонами $2R$ и $4R$. Впишем в этот прямоугольник равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A (рис. 1).

Если вращать наш рисунок вокруг оси AB , то круг при вращении образует шар с радиусом R , прямоугольник — круговой цилиндр с радиусом основания $2R$, а треугольник — конус, вписанный в цилиндр, с тем же основанием.

Выберем на оси вращения AB точку C на некотором расстоянии x от точки A и проведем через точку C плоскость α , перпендикулярную AB . В сечении с цилиндром она образует круг радиусом $2R$, в сечении с конусом — круг радиусом $CD = AC = x$ (поскольку угол при вершине конуса прямой); в сечении с шаром — круг радиусом CE . Из рисунка 1 видно, что

$$AE^2 = CE^2 + AC^2 = CE^2 + CD^2.$$

С другой стороны, AE — это катет прямоугольного треугольника AEB (AB — диаметр круга), а потому $AE^2 = AB \cdot AC$. Следовательно,

$$AB \cdot AC = CD^2 + CE^2.$$

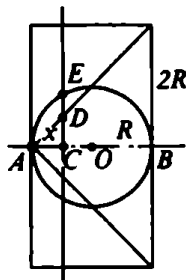


Рис. 1

Умножив обе части этого равенства на число πAB , получим

$$\pi AB^2 \cdot AC = \pi CD^2 \cdot AB + \pi CE^2 \cdot AB. \quad (1)$$

Величина $S_{\kappa} = \pi CD^2$ — это площадь круга, получающегося при пересечении конуса плоскостью α . Величина $S_{\text{ш}} = \pi CE^2$ — это площадь круга, получающегося в сечении шара. Площадь же круга, получающегося в сечении цилиндра, равна $S_{\text{ц}} = \pi AB^2$. Поэтому равенство (1) мы можем переписать так:

$$x \cdot S_{\text{ц}} = 2R(S_{\kappa} + S_{\text{ш}}). \quad (2)$$

Если бы множитель x был постоянный, то с помощью принципа поперечных сечений мы выразили бы друг через друга объемы шара, конуса и цилиндра.

Но множитель x — переменный, и это сильно осложняет ситуацию. Казалось бы, дальше не продвинуться. Но тут Архимеда осеняет гениальная догадка, смысл которой состоит в следующем.

Отложим на прямой AB влево от точки A отрезок AT : $AT = AB$. Представим теперь, что отрезки AB и AT являются плечами рычага, точка опоры которого совпадает с точкой A . Тогда соотношение (2) показывает, что если перенести круговые сечения шара $S_{\text{ш}}$ и конуса S_{κ} в точку T , то они «уравновесят» по отношению к точке A круговое сечение цилиндра $S_{\text{ц}} = \pi AB^2$, оставленное на своем месте*. Архимед

замечает, что подобное соотношение устанавливается и для любых других сечений шара, конуса и цилиндра, лежащих в одной и той же «вертикальной» плоскости. Тут важно отметить, что сечения шара и конуса «подвешиваются» все время в одной и той же точке T , на расстоянии $2R$ от точки опоры рычага A , а сечения цилиндра — на расстоянии x от точки опоры A . Рассматривая различные сечения наших трех тел вертикальными плоскостями (отстоящими от точки A на различные расстояния x), мы каждый раз подвешиваем сечения цилиндра в разных местах (сечения конуса и шара меняются по величине при изменении x). Меняя x от нуля до $2R$, т. е. рассматривая всевозможные сечения трех тел, мы, соответственно, уравновешиваем каждые три сечения (рис. 2). В результате слева в точке T оказываются подвешенными все сечения шара и конуса, а справа — все сечения цилиндра (рис. 3). Архимед пишет**:

* Мы предполагаем, что сечения $S_{\text{ш}}$, S_{κ} и $S_{\text{ц}}$ сделаны из одного материала в виде очень тонких круглых дисков одинаковой толщины.

** Именно в этих рассуждениях усматривается остроумное сочетание принципа поперечных сечений с правилом механического равновесия рычага.

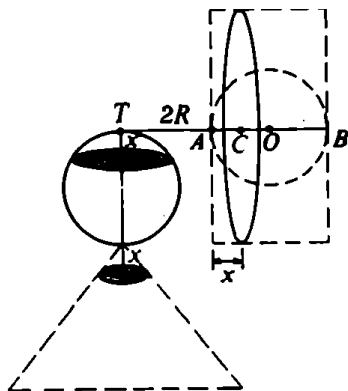


Рис. 2

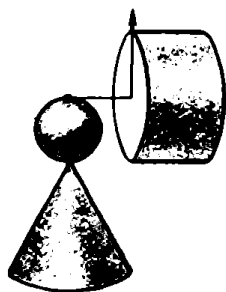


Рис. 3

«Если теперь, беря такие круги, заполнить ими как цилиндр, так и шар с конусом, то цилиндр, оставаясь в том же положении, будет относительно точки A находиться в равновесии со вместе взятыми шаром и конусом, если перенести их на рычаг в T и поместить так, чтобы центр тяжести каждого из них оказался под T ». Но центр тяжести оставшегося на месте цилиндра находится в точке O — середине отрезка AB . Поэтому, если $V_{\text{ц}}$, $V_{\text{ш}}$ и $V_{\text{к}}$ — соответственно объемы цилиндра, шара и конуса, то по правилу рычага условие равновесия имеет вид

$$V_{\text{ц}} \cdot AO = (V_{\text{ш}} + V_{\text{к}}) \cdot AT,$$

т. е.

$$R \cdot V_{\text{ц}} = 2R \cdot (V_{\text{ш}} + V_{\text{к}}),$$

откуда

$$V_{\text{ш}} = \frac{1}{2} V_{\text{ц}} - V_{\text{к}}.$$

Но конус по построению был вписан в цилиндр, так что его объем втрое меньше объема цилиндра $V_{\text{к}} = \frac{1}{3} V_{\text{ц}}$.

Поэтому

$$V_{\text{ш}} = \frac{1}{2} V_{\text{ц}} - V_{\text{к}} = \frac{1}{2} V_{\text{ц}} - \frac{1}{3} V_{\text{ц}} = \frac{1}{6} V_{\text{ц}}.$$

Заменяем наш цилиндр цилиндром, описанным около шара. Радиус его основания будет вдвое меньше радиуса основания первоначального цилиндра. Объем нового цилиндра $V_{\text{ц}}$ в четыре раза меньше объема первоначального цилиндра $V_{\text{ц}} = 4v_{\text{ц}}$, так что

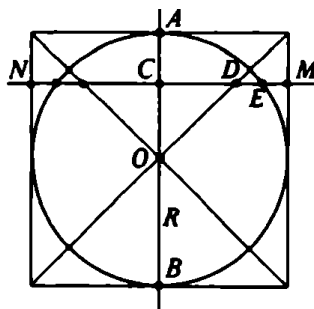


Рис. 4

$$V_{\text{ш}} = \frac{1}{6} V_{\text{ц}} = \frac{2}{3} v_{\text{ц}},$$

т. е. объем шара в полтора раза меньше объема описанного цилиндра, — это и есть результат, которым так гордился Архимед.

Геометрическое решение

Возьмем круг радиусом R и опишем около него квадрат. Проведем диагональ квадрата, как на рисунке 4. Вращая рисунок 4 вокруг вертикальной оси AB , мы получим шар радиусом R , описанный около шара цилиндр и вписанный в цилиндр «двойной» круговой конус с вершиной в центре шара O . На рисунке 5 изображены эти три тела.

Возьмем точку C на оси вращения AB на некотором расстоянии x от центра шара и проведем через C горизонтальную плоскость MN . Эта плоскость в сечении с цилиндром образует круг радиусом $CM = R$, в сечении с конусом — круг радиусом $CD = OC = x$ (так как угол при вершине конуса прямой) и в сечении с шаром — круг радиусом CE . По теореме Пифагора

$$OE^2 = CE^2 + OC^2, \text{ или } CM^2 = CE^2 + CD^2.$$

Умножив обе части этого соотношения на число π , получим

$$\pi CM^2 = \pi CE^2 + \pi CD^2,$$

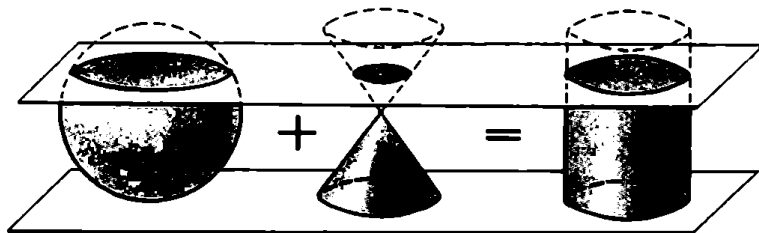


Рис. 5

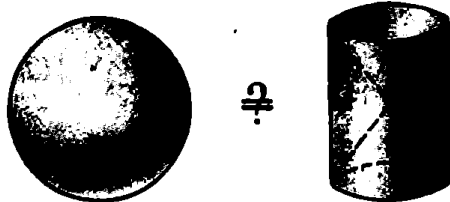


Рис. 6

т. е.

$$s_{\text{ц}} = S_{\text{ш}} + s_{\text{к}}, \quad (3)$$

где $s_{\text{ц}}$, $S_{\text{ш}}$ и $s_{\text{к}}$ — соответственно площади кругов, получающихся при пересечении цилиндра, шара и конуса плоскостью MN .

Соотношение (3) выполняется для любых других сечений цилиндра, шара и конуса, лежащих в одной и той же горизонтальной плоскости. Вспоминая принцип поперечных сечений, перейдем от соотношения (3) для площадей к такому же соотношению для объемов:

$$v_{\text{ц}} = V_{\text{ш}} + v_{\text{к}}.$$

Поскольку объем цилиндра втрое больше объема вписанного в него «двойного конуса» (у которого те же основание и высота), т. е. $v_{\text{к}} = \frac{1}{3} v_{\text{ц}}$, мы получаем результат Архимеда:

$$V_{\text{ш}} = v_{\text{ц}} - v_{\text{к}} = v_{\text{ц}} - \frac{1}{3} v_{\text{ц}} = \frac{2}{3} v_{\text{ц}},$$

а именно, что объем шара в полтора раза меньше объема описанного цилиндра.

Задача

На рисунке 6 изображены шар и цилиндр с двумя коническими воронками на основаниях. Высота и диаметр основания цилиндра равны диаметру шара. Какое из этих двух тел весит больше?

В ПОИСКАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

В. Дубровский

Определение площади поверхности является одной из традиционно сложных тем школьной геометрии. Связано это с отсутствием достаточно простого общего определения, которое охватывало бы по крайней мере все поверхности, изучаемые в школе: цилиндр, конус и сферу. Здесь мы рассмотрим два подхода к такому определению и обсудим трудности, возникающие при этих подходах.

Все ли можно развернуть?

Проще всего определить и вычислить площади поверхностей цилиндра и конуса — достаточно рассмотреть развертки этих поверхностей. Однако определение площади поверхности как площади ее развертки не годится в качестве общего определения просто потому, что поверхностей, которые можно было бы «развернуть», слишком мало. Мы объясним, почему нельзя «развернуть» сферу; аналогичные рассуждения применимы и ко многим другим поверхностям вращения.

Давать точное определение развертки — дело довольно хлопотное. Ясно, однако, что если бы удалось «развернуть» сферу, то, в частности, мы получили бы отображение f какой-то достаточно маленькой «сферической шапочки» на часть плоскости (рис. 1), при котором длина любой кривой L , лежа-

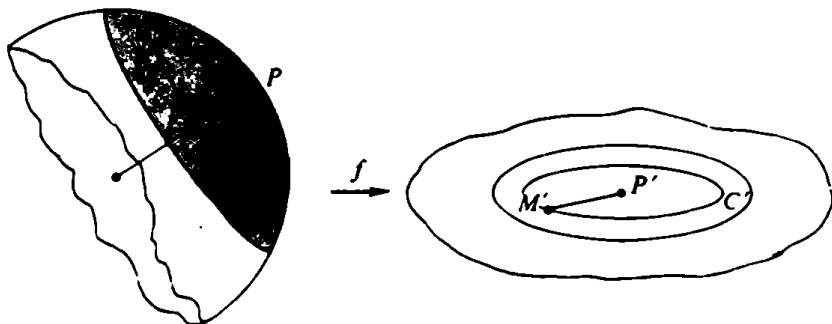


Рис. 1. Невозможность развертки сферы

щей на этой «шапочке», равнялась бы длине соответствующей ей кривой $f(L)$ на плоскости. В частности, длина $d(A, B)$ кратчайшей кривой, соединяющей точки A и B на сфере, должна равняться длине кратчайшей кривой, соединяющей точки $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$ на плоскости, т. е. длине отрезка $A'B'$:

$$d(A, B) = A'B'.$$

Можно доказать, что $d(A, B)$ есть длина меньшей из двух дуг большой окружности, проходящей через точки A и B , определяемых этими точками, однако нам это не потребуется.

Рассмотрим множество C точек M сферы, для которых «сферическое расстояние» $d(M, P)$ от некоторой фиксированной точки P равно фиксированному числу $R > 0$. Очевидно, что если точка M_1 получается из точки M поворотом около диаметра сферы, проходящего через P , то $d(M_1, P) = d(M, P)$. Отсюда легко вывести (выведите!), что множество C есть окружность. Ее центр O совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из любой точки $M \in C$ на радиус сферы, проходящей через точку P (см. рис. 1); поэтому радиус этой окружности $r = OM < MP$. С другой стороны, $d(M, P)$ есть длина некоторой кривой, соединяющей M и P , а отрезок MP является кратчайшей из таких кривых; поэтому $MP \leq d(M, P) = R$. Следовательно, $r < R$. При развертке окружность C перейдет в множество $C' = f(C)$ точек, удаленных от точки $f(P)$ на расстояние R , т. е. в окружность радиусом R . Длина окружности C равна $2\pi r$, а окружности $C' - 2\pi R > 2\pi r$. Это противоречит сформулированному выше свойству сохранения длин, и, таким образом, развертка сферы невозможна.

Сапог Шварца

Итак, развернуть поверхность, вообще говоря, невозможно; попытаемся поступить по-другому. Рассмотрим последовательность многогранных поверхностей Π_n , «сходящуюся» к данной поверхности Π . Допустим, что последовательность их площадей S_n имеет предел S ; тогда кажется естественным принять число S за площадь поверхности Π^* . Конечно, при этом нужно проявить осторожность — ведь даже при определении длины кривой рассматривают не произвольные, а *описанные* ломаные (они соответствуют многогранным поверхностям), сходящиеся к кривой, иначе предел их длин будет зависеть от выбора последовательности ломаных (см. рисунок 2 и задачу 3, а также ста-

* Именно такой подход применялся в старом учебнике геометрии А. П. Киселева при определении площадей поверхности цилиндра и конуса.

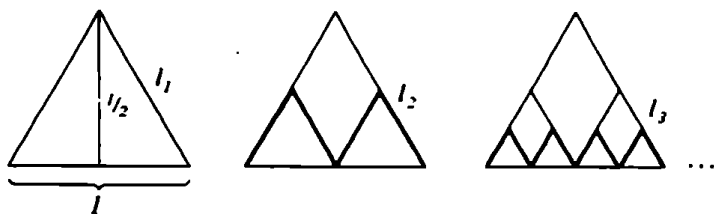


Рис. 2. Последовательность ломаных l_n , сходящихся к отрезку единичной длины (но не вписанным в него), длина каждой из которых равна $\sqrt{2}$

тью А. Звонкина «Что такое π ?» в настоящем сборнике). Попробуем найти площадь поверхности цилиндра как предел площадей вписанных в него многогранных поверхностей. Поверхности эти определим следующим образом.

Впишем в основание цилиндра правильный n -угольник; рассмотрим далее такой же n -угольник, расположенный над основанием на высоте H/k , где H — высота цилиндра, k — фиксированное натуральное число, и повернутый относительно первого n -угольника на угол π/n . Продолжая такое построение, получим $(k+1)n$ точек — вершин n -угольников: соединим эти вершины ребрами, как показано на рисунке 3. В итоге образуется вписанная в цилиндр многогранная поверхность $\Pi(n, k)$, имеющая nk равных треугольных граней. Задавая различные последовательности $\{k_n\}$, например

$$k_n \equiv 1, \quad k_n = n, \quad k_n = n^{10}$$

и т. п., мы будем получать различные последовательности поверхностей $\Pi(n, k_n)$, причем все они «сходятся» к поверхно-

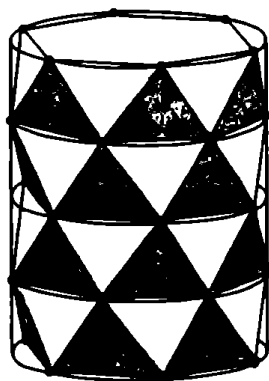


Рис. 3. "Санои Шварца" ($\Pi(6, 4)$)

другим, а при $k_n = n^3$ последовательность $S(n, k_n)$ и вовсе неограничена (см. также задачу 4). Причина в том, что при слишком быстром росте k_n грани поверхности $\Pi(n, k_n)$ располагаются под большим углом к поверхности цилиндра, $\Pi(n, k_n)$ «собирается в гармошку»; ясно, что за счет таких складок площадь поверхности сильно увеличивается.

Описанная конструкция была предложена в 1890 году известным немецким математиком Г. А. Шварцем; ее называют «сапогом Шварца». Из этой конструкции видно, что понятие «сходимости» последовательности Π_n к Π в нашем определении площади поверхности следует уточнить — так, чтобы учитывались не только расстояния между точками поверхностей Π_n и Π , но и углы между гранями поверхностей Π_n и поверхностью Π . С этими уточнениями определение становится сложным, громоздким и, конечно, неуместным в школьном курсе.

Как же быть?

И все-таки можно дать общее определение площади поверхности, гораздо более простое, чем определение через вписанные многогранники. С его вариантами (для сферы, цилиндра, конуса) можно познакомиться в учебнике. Подробнее об этом определении (его предложил один из крупнейших немецких математиков Г. Минковский) рассказано в другой статье настоящего сборника.

Задачи

1. Докажите, что, хотя и не существует развертки сферы, можно построить

а) отображение полусферы на плоскость, переводящее кратчайшие линии на сфере в кратчайшие линии на плоскости;

б) отображение сферы на плоскость, сохраняющее площадь.

2. Объясните, почему приведенное в тексте доказательство невозможности развертки сферы не проходит для конуса. Докажите, что нельзя развернуть параболоид — поверхность, полученную при вращении параболы около ее оси. (Обратите внимание: прежде, чем поверхность разворачивать, ее можно разрезать.)

3. Приведите примеры последовательностей функций $f_n(x)$ ($x \in [0; 1]$), графиками которых являлись бы ломаные длин l_n , причем $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0; 1]$, и в то же время

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = c$, где c — любое заданное число, не меньшее 1;

б) последовательность $\{l_n\}$ неограничена;

в) последовательность $\{l_n\}$ ограничена, но не имеет предела.

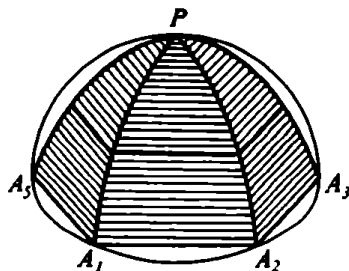


Рис. 5. Поверхность Π_5

4. Докажите, что в примере Шварца можно так подобрать последовательность $\{k_n\}$, что последовательность площадей

а) сходится к любому заданному числу из промежутка $[2\pi RH; +\infty)$;

б) ограничена, но не имеет предела.

5. Предлагается следующий способ вычисления площади поверхности сферы. Разобьем сферу «экватором» на две полусферы и рассмотрим одну из них. Поделим экватор на n равных частей точками A_1, A_2, \dots, A_n и соединим их с «полюсом» P «меридианами». Теперь представим себе, что правильный n -угольник $A_1 \dots A_n$ поднимается над экваториальной плоскостью, оставаясь ей параллельным и сжимаясь к точке P так, что его вершины все время лежат на дугах $A_i P$. Его контур при этом заметает некоторую куполообразную поверхность Π_n (рис. 5). Ясно, что поверхность Π_n при больших n очень близка к полусфере; более того, нетрудно доказать (попробуйте), что ее площадь при $n \rightarrow \infty$ стремится к площади полусферы. Разогнув дольки $A_i A_{i+1} P$, мы получим n треугольников с одинаковыми основаниями, сумма длин которых равна периметру p_n n -угольника $A_1 \dots A_n$, и высотами h_n . Поскольку, очевидно, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 2\pi R$,

где R — радиус сферы, а $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \frac{1}{2} \pi R$, то предел площадей по-

верхностей Π_n равен $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} p_n h_n = \frac{1}{2} \pi^2 R^2$. Следовательно, площадь сферы равна $\pi^2 R^2$. Где ошибка?

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПО МИНКОВСКОМУ

В. Дубровский

*Длина дороги равна ее площади,
деленной на ее ширину.*

(Из лекции для школьников)

В предшествующей статье о площади поверхности мы рассказали о том, как не следует ее определять. Мы показали там, что для этой цели не подходят ни развертка, ни приближение многогранными поверхностями.

Здесь будет предложен корректный способ определения площади поверхности, придуманный выдающимся немецким физиком и математиком Г. Минковским (1864–1909). Его определение отличается общностью и простотой. Оно позволяет легко вычислять площади простейших поверхностей. В школьном курсе геометрии это определение используется при нахождении площади сферы и площадей поверхностей цилиндра, конуса и шарового сегмента.

Идея определения Минковского очень наглядна. Представим себе слой постоянной толщины, «окутывающий» поверхность. Интуитивно ясно, что его объем $V(\delta)$ (2δ — толщина слоя) примерно равен $2\delta \cdot S$, где S — площадь рассматриваемой поверхности. Вычислив величину $V(\delta)/2\delta$, мы найдем приближенное значение S , причем приближение будет тем лучше, чем меньше δ .

Переведем эту идею на язык математики. Математическим эквивалентом «слоя постоянной толщины» является понятие *окрестности фигуры*. Дадим определение этого понятия. Пусть Φ — произвольная фигура в пространстве, δ — положительное число. Множество Φ_δ точек P пространства, удаленных от Φ на расстояние, не превышающее δ :

$$\rho(P, \Phi) \leq \delta,$$

называется (замкнутой*) δ -окрестностью фигуры Φ .

Чтобы это определение стало понятным, надо определить понятие расстояния от точки до фигуры. Под *расстоянием*

* Так как мы будем рассматривать только замкнутые окрестности, прилагательное «замкнутый» в дальнейшем опускается.

$\rho(P, \Phi)$ от точки P до фигуры Φ понимается такое число d , что любой шар с центром P и радиусом, меньшим d , не имеет с Φ общих точек, а любой шар с центром P и радиусом, большим d , имеет.

Замечание. δ -окрестность фигуры можно определить и без понятия расстояния до Φ . Оказывается, данное определение эквивалентно следующему: δ -окрестность фигуры Φ — это множество Φ_δ таких точек P пространства, что всякий шар с центром P и радиусом, большим δ , имеет с Φ общие точки. Продумайте это.

Если в определении расстояния от точки до фигуры заменить слова «пространство» и «шар» на «плоскость» и «круг», то получится определение δ -окрестности фигуры на плоскости. Везде, где не оговорено противное, мы будем рассматривать пространственные окрестности.

Упражнения

1. а) Найдите плоскую и пространственную δ -окрестности отрезка. Докажите, что площадь первой и объем второй равны, соответственно, $2\delta d + \pi\delta^2$ и $\pi\delta^2 d + \frac{4}{3}\pi\delta^3$, где d — длина отрезка.

б) Решите ту же задачу для окружности радиусом $R > \delta$ (в этом случае ответы такие: $4\pi\delta R$ и $2\pi^2 R\delta^2$).

2. Найдите в пространстве δ -окрестность правильного шестиугольника. Докажите, что $V(\delta)/2\delta$, где $V(\delta)$ — ее объем, при $\delta \rightarrow 0$ стремится к площади шестиугольника.

Дадим теперь основное для этой заметки определение: *площадью поверхности* Π называется предел

$$S(\Pi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{V(\Pi_\delta)}{2\delta}, \quad (1)$$

где $V(\Pi_\delta)$ — объем ее δ -окрестности.

Предостережение. Разумеется, предел (1) может и не существовать. Можно показать, что для всех «хороших» поверхностей он существует (в простейших случаях он будет нами вычислен). Однако не следует думать, что из его существования для некоторой фигуры Π вытекает, что Π является поверхностью в общепринятом смысле. Кроме того, для площади по Минковскому не всегда справедливо равенство $S(\Pi_1 \cup \Pi_2) = S(\Pi_1) + S(\Pi_2)$ (при $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$); соответствующий пример рассматривается в задаче 4. Впрочем, с «хорошими» поверхностями таких неприятностей не случается.

Примеры вычисления площадей

Вычислять площади поверхностей, непосредственно пользуясь данным выше определением, удастся только в простейших случаях*.

Мы найдем площади сферы, тора (поверхности, получаемой при вращении окружности вокруг непересекающей ее прямой), боковых поверхностей цилиндра и конуса. Половинки осевых сечений δ -окрестностей этих поверхностей изображены на рисунках 1, 2, 3,а, 4,а.

Упражнения

3. Докажите, что δ -окрестность поверхности, получаемой при вращении плоской кривой L вокруг оси l , лежащей в одной плоскости с кривой, есть результат вращения плоской δ -окрестности этой кривой вокруг оси l .

4. Докажите, что тела, возникающие при вращении фигур, заштрихованных на рисунках 1, 2, 3,а, 4,а, являются δ -окрестностями соответствующих поверхностей.

1. Сфера. Очевидно, что объем δ -окрестности сферы $\Sigma = \Sigma(R)$ с радиусом R равен разности объемов шаров с радиусами $R + \delta$ и $R - \delta$ (рис. 1):

$$V(\Sigma_\delta) = \frac{4}{3} \pi ((R + \delta)^3 - (R - \delta)^3) = 2\delta \cdot \frac{4}{3} \pi (3R^2 + \delta^2).$$

Деля последнее выражение на 2δ и переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, находим, что $S(\Sigma(R)) = 4\pi R^2$.

2. Тор. Рассмотрим тор $T = T(R, r)$, получающийся при вращении окружности с радиусом r вокруг оси, отстоящей от ее центра на расстояние R (рис. 2). Ясно, что ограниченное тором тело есть r -окрестность окружности радиусом R , объем которой, согласно результату упражнения 1,б), равен $2\pi^2 R r^2$. Пользуясь этой формулой, легко найти объем δ -окрестности тора (см. рис. 2) — он равен разности объемов $(r + \delta)$ -окрестности и $(r - \delta)$ -окрестности окружности с радиусом R :

$$V(T_\delta) = 2\pi^2 R (r + \delta)^2 - 2\pi^2 R (r - \delta)^2 = 2\delta \cdot 4\pi^2 R r.$$

Следовательно,

$$S(T(R, r)) = 4\pi^2 R r.$$

Из рисунков 3,а и 4,а видно, что найти объемы δ -окрестностей боковых поверхностей цилиндра и особенно конуса не

* В более сложных случаях площадь поверхности находится с помощью тех или иных интегральных формул.

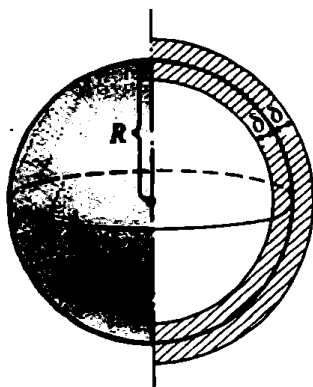


Рис. 1

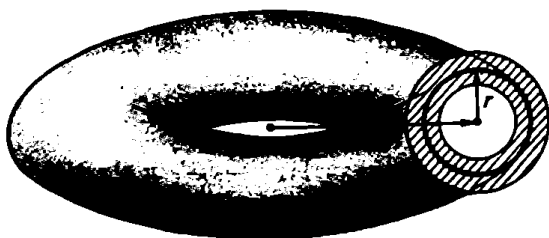


Рис. 2

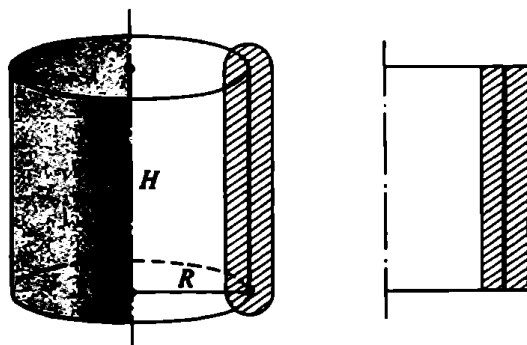


Рис. 3

так просто, как для сферы и тора. Вычисления существенно упростятся, если чуть-чуть «подправить» эти окрестности (рис. 3, б и 4, б). Мы проведем подсчет, воспользовавшись «поправками», а затем докажем их правомерность.

3. Цилиндр. Обозначим через $C = C(R, H)$ боковую поверхность цилиндра с радиусом R и высотой H . Объем ее «исправленной» δ -окрестности C'_δ (рис. 3, б) равен разности объемов цилиндров с радиусами $R + \delta$ и $R - \delta$ и одинаковой высотой H :

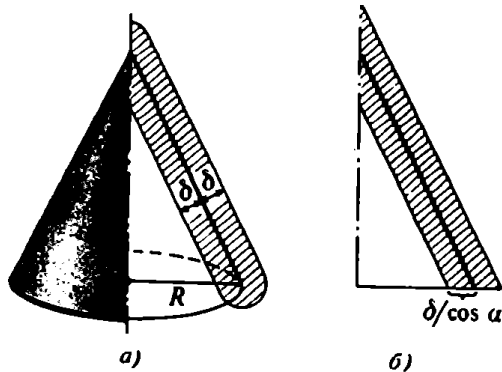


Рис. 4

$$V(C'_\delta) = \pi H((R + \delta)^2 - (R - \delta)^2) = 2\delta \cdot 2\pi RH, \quad (2)$$

поэтому

$$S(C(R, H)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{V(C'_\delta)}{2\delta} = 2\pi RH.$$

4. Конус. Пусть R — радиус основания конуса, α — угол между его осью и образующей, а $K = K(R, \alpha)$ — его боковая поверхность. Тогда объем тела K'_δ (рис. 4, б) равен разности объемов конусов с радиусами $R + \frac{\delta}{\cos \alpha}$ и $R - \frac{\delta}{\cos \alpha}$ и одинаковыми углами α . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} V(K'_\delta) &= \frac{1}{3} \pi \operatorname{ctg} \alpha \left[R + \frac{\delta}{\cos \alpha} \right]^3 - \frac{1}{3} \pi \operatorname{ctg} \alpha \left[R - \frac{\delta}{\cos \alpha} \right]^3 = \\ &= 2\delta \frac{\pi}{\sin \alpha} \left[R^2 + \frac{\delta^2}{3 \cos^2 \alpha} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, $S(K(R, \alpha)) = \frac{\pi R^2}{\sin \alpha}$. Если вместо угла α задана длина l образующей конуса, то, поскольку $l = \frac{R}{\sin \alpha}$, для площади получаем формулу $S(K) = \pi Rl$.

Докажем теперь законность замены окрестностей C_δ и K_δ на C'_δ и K'_δ . Ясно, что замена окрестности Π_δ в формуле (1) на какое-то тело Π'_δ не влияет на результат в том и только том

случае, когда величина $v(\delta) = \frac{V(\Pi_\delta) - V(\Pi'_\delta)}{2\delta}$ стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Разности объемов $V(C_\delta)$ и $V(C'_\delta)$, $V(K_\delta)$ и $V(K'_\delta)$

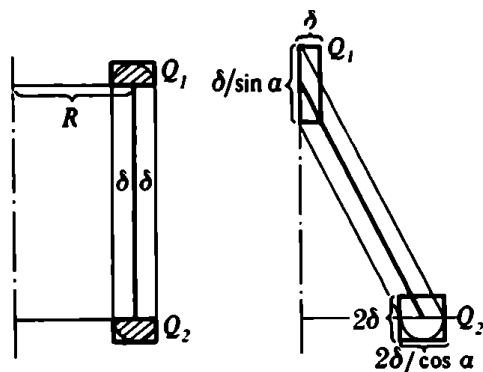


Рис. 5

по модулю не превосходят, очевидно, объемов тел, получаемых при вращении прямоугольников Q_1 и Q_2 на рисунках 5,а и 5,б соответственно. Найдя эти объемы (заметим, что для этого можно воспользоваться формулой (2)), мы получим, что в случае цилиндра $|v(\delta)| \leq 4\pi R\delta$, а в случае конуса $|v(\delta)| \leq \left[\frac{4\pi R}{\cos \alpha} + \frac{\pi\delta}{\sin \alpha} \right] \delta$. Следовательно, в обоих случаях $\lim_{\delta \rightarrow 0} v(\delta) = 0$.

Обобщения

Пусть для какого-то множества Φ существует конечный и положительный предел $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{V(\Phi_\delta)}{2\delta}$; тогда, очевидно, при заме-

не знаменателя 2δ на $c\delta^n$ этот предел обратится в нуль при $n < 1$ и в бесконечность при $n > 1$. В определенном смысле это свойство специфично для поверхностей. Легко понять, что для тел таким пограничным значением будет уже $n = 0$, а для линий — $n = 2$.

В частности, в последнем случае принимают следующее определение: длиной линии L по Минковскому (в пространстве)

называется предел $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{V(L_\delta)}{\pi\delta^2}$. Интуитивным оправданием это-

го определения служит то, что сечение окрестности L_δ , перпендикулярное линии L , есть круг радиусом δ (площадью $\pi\delta^2$), так что объем L_δ должен примерно равняться произведению $\pi\delta^2$ на длину линии L . Проверьте, пользуясь результатом упражне-

ния 1, что определение Минковского дает для длин отрезка и окружности нужные значения.

Менее содержательно, но вполне осмысленно рассмотрение

величин $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{V(\Phi_\delta)}{c \delta^n}$ при $n = 0$ и $n = 3$, где c — надлежащим

образом выбранные постоянные (см. задачу 7).

Аналогичные определения можно дать и на плоскости, где

наиболее интересен случай $n = 1$: величину $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{S(L_\delta)}{2\delta}$,

где $S(L_\delta)$ — площадь (плоской) δ -окрестности кривой L , естественно принять за длину линии L (ср. эпиграф).

Дальнейшие обобщения касаются n -мерных пространств при $n > 3$, и на них мы, конечно, останавливаться не будем.

Задачи

1. Покажите, что не всегда δ -окрестность фигуры Φ является объединением всех шаров с радиусом δ и с центрами в точках этой фигуры.

2. Приведите пример двух различных фигур Φ и Φ' таких, что $\Phi_\delta = \Phi'_\delta$: а) при некотором δ ; б) при всех δ .

3. Докажите, что объем δ -окрестности выпуклого n -угольника равен $2\delta \cdot S + \pi \delta^2 \cdot P + 4\pi \delta^2$, где S — его площадь, а P — полупериметр.

4. Пусть Q — квадрат, лежащий в плоскости Oxy , Q_1 — множество его точек, у которых обе координаты x и y рациональны, Q_2 — его остальные точки. Докажите, что все эти множества имеют площадь по Минковскому, причем $S(Q) = S(Q_1) = S(Q_2)$, так что $S(Q_1 \cup Q_2) < S(Q_1) + S(Q_2)$, хотя множество Q_1 и Q_2 не пересекаются.

5. Найдите площадь поверхности, получаемой при вращении дуги окружности вокруг стягивающей ее хорды.

6. Найдите площадь поверхности тела, являющегося пересечением двух (достаточно длинных) цилиндров с радиусами R , оси которых проходят через общую точку и взаимно перпендикулярны.

7. Подберите константы c_1 и c_2 так, чтобы пределы

а) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{V(\Phi_\delta)}{c_1}$, б) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{V(\Phi_\delta)}{c_2 \delta^2}$ имели содержательный геометрический

смысл. Для каких фигур Φ они положительны?

СОДЕРЖАНИЕ

<i>В. Болтянский</i> ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ	4
<i>Б. Гейдман</i> ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ	15
<i>Б. Гейдман</i> ГОМОТЕТИЯ И ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ	18
<i>В. Дубровский</i> ШЕСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМЫ О МЕДИАНАХ	22
<i>С. Сефибеков</i> ЧЕТЫРЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ О БИСЕКТРИСЕ	26
<i>Б. Ивлеев</i> ЕЩЕ 13 ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМЫ О БИСЕКТРИСЕ	28
<i>М. Балк, В. Болтянский</i> ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ОБЛЕГЧАЕТ РЕШЕНИЕ	32
<i>В. Дубровский</i> МОМЕНТ ИНЕРЦИИ В ГЕОМЕТРИИ	42
<i>В. Кучеров</i> ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ	55
<i>А. Звонкин</i> ЧТО ТАКОЕ π ?	61
<i>Б. Ивлеев</i> ДВУГРАННЫЕ И ТРЕХГРАННЫЕ УГЛЫ	67
<i>В. Матизен</i> РАВНОГРАННЫЕ И КАРКАСНЫЕ ТЕТРАЭДРЫ	74
<i>В. Гутеклиатер</i> РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ	82
	127

<i>Л. Штернберг</i>	
МНОГОФИГУРНАЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА	86
<i>В. Болтянский</i>	
О ПОНЯТИЯХ ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМА	96
<i>М. Маликов</i>	
ОБЪЕМ ШАРА	108
<i>В. Дубровский</i>	
В ПОИСКАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ	114
<i>В. Дубровский</i>	
ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПО МИНКОВСКОМУ	120

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

Геометрия

Под редакцией А. А. Егорова

Приложение к журналу «Квант» № 1/95

Редактор А. Ю. Котова
 Литературный редактор Л. В. Кардасевич
 Художественный редактор С. А. Стулов
 Технический редактор Е. С. Потапенкова

ИБ № 8

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,
 тел. 250-33-54

Формат 84×108 1/32. Бумага офс. Гарнитура литературная.
 Печать офсетная. Усл. печ. л. 4. Тираж 15 000 экз. Заказ 37.
 Цена договорная.

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический
 комбинат Комитета Российской Федерации по печати
 142300, г. Чехов Московской области